Capitolo 12

La statica

1.1. Paragrafo

12.1 L'EQUILIBRIO STATICO

Una semplice definizione di *equilibrio* può essere enunciata come segue: *un corpo è in equilibrio se, inizialmente fermo e lasciato libero di muoversi, rimane fermo nel tempo.*

In realtà, un discorso più approfondito e preciso richiede una definizione più rigorosa della precedente e soprattutto l'esigenza di porre una distinzione tra i concetti di *equilibrio* e di *quiete*. Arriviamo così al seguente enunciato:

Un corpo si dice **in equilibrio** *se la risultante delle forze ad esso applicate è nulla*, mentre è in ***quiete*** *se risulta perfettamente fermo.*

E' semplice osservare come un oggetto che si muova di moto rettilineo uniforme rispetto ad un dato sistema di riferimento, pur non essendo fermo (vedi il primo principio della dinamica: $\mathbf{R} = 0$) sia invece da considerarsi in equilibrio. Viceversa, un pendolo considerato nel momento in cui raggiunge la sua oscillazione massima ed inverte il moto, non è certamente in equilibrio in tale posizione, ma risulta fermo (*in quiete,* con $\mathbf{v} = 0$) almeno per un breve istante. Un oggetto fermo appoggiato su di un tavolo orizzontale è invece in quiete ed in equilibrio contemporaneamente e questo fatto, che illustra la situazione più comune che ci si può presentare, è il motivo per cui, nel linguaggio comune, i due concetti sono spesso confusi tra di loro.

Definiamo, inoltre, **corpo rigido**, un corpo esteso tale che *la distanza tra due suoi punti qualsiasi non cambi sotto l'azione delle forze ad esso applicate.*

E' evidente che tutti i corpi sono, più o meno, deformabili e che quella di corpo rigido è solo una astrazione, una delle tante che la fisica utilizza per semplificare i fenomeni studiati e per rappresentarli attraverso dei modelli matematici ragionevolmente semplici.

La **statica** è quella parte della **meccanica** che si occupa *dello studio delle condizioni di equilibrio di corpi puntiformi ed estesi*

(i) STATICA DEI CORPI PUNTIFORMI

La statica dei corpi puntiformi è molto semplice e, di fatto, si riduce ad una sola condizione. Poiché un punto non può ruotare (non avendo dimensione), *se esso è in equilibrio allora la risultante **R** delle forze ad esso applicate deve essere nulla.*

Si faccia attenzione che <u>tale condizione non è sufficiente per assicurare la quiete</u>: se la risultante **R** delle forze applicate ad un punto è nulla, posso avere un oggetto fermo rispetto al sistema di riferimento considerato, ma posso anche avere un oggetto animato da moto rettilineo uniforme. *La condizione **R** = 0 è quindi necessaria e sufficiente per l'equilibrio, ma necessaria e non sufficiente per avere la quiete di un corpo puntiforme.*

E' evidente che oggetti puntiformi non esistono nella realtà. In moltissime situazioni, però, i corpi estesi possono essere considerati come se fossero puntiformi. Tale assunto semplifica notevolmente moltissimi problemi di fisica. Vedremo in seguito quando ciò sarà possibile.

12.2 EQUILIBRIO PER LA TRASLAZIONE

Un **corpo esteso** può traslare e ruotare: ognuna di queste due situazioni richiede una particolare condizione perché l'equilibrio sia assicurato. La prima di queste riguarda la traslazione e, di fatto, ci riconduce alla seguente affermazione.

*Se un corpo è in equilibrio allora la risultante **R** delle forze ad esso applicate deve essere nulla, cioè*

$$\boldsymbol{R} = 0$$

In tal caso l'oggetto è fermo (oppure trasla di moto rettilineo uniforme).

Nelle applicazioni pratiche occorrerà ricordarsi che tale condizione deve essere verificata per ognuna delle tre componenti spaziali delle forze applicate al corpo in questione. Sarà allora più utile scrivere:

$$\mathbf{R}_x = 0$$

$$\mathbf{R}_y = 0$$

$$\mathbf{R}_z = 0$$

E' facile rendersi conto che tale condizione non é sufficiente per assicurare anche l'equilibrio alla rotazione. Consideriamo, infatti, una sbarra rigida di lunghezza L. Applichiamo ai due estremi, in direzione perpendicolare alla sbarra, due forze **F** di uguale modulo, ma di verso opposto. Due forze di tali caratteristiche costituiscono quella che comunemente si chiama una *coppia di forze*. La risultante delle forze applicate alla sbarra continua ad essere nulla, ma la sbarra, pur non traslando, inizia a ruotare attorno ad un asse passante per il suo centro.

La prima condizione di equilibrio non è quindi in grado di assicurare l'assenza dei moti rotatori. A tal fine occorre introdurre un concetto completamente nuovo, quello di *momento di una forza rispetto ad un punto.*

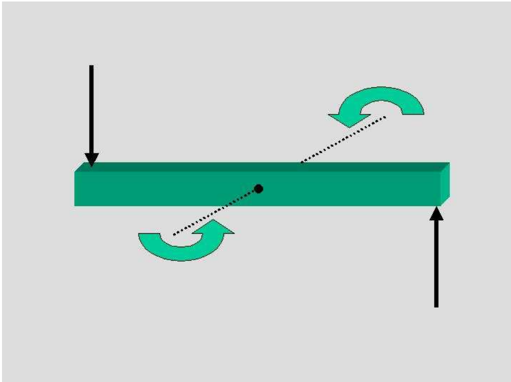

Fig. 1 - *Due forze uguali ed opposte, applicate agli estremi di una sbarra rigida, ne causano la rotazione attorno ad un asse passante per il centro. Non si ha traslazione perché la risultante è nulla:* ***R*** *= 0.*

12.3 MOMENTO DI UNA FORZA RISPETTO AD UN PUNTO

Consideriamo un corpo esteso che possa muoversi di moto rotatorio attorno ad un asse: una porta attorno al suo cardine, per esempio. Per ottenerne la rotazione occorre applicare una forza sufficientemente intensa, ma questa condizione, da sola, non basta. Occorre, ad esempio, che la direzione di tale forza non intersechi quella del cardine, altrimenti nessuna rotazione sarà possibile. L'entità della rotazione, inoltre, non dipende solo dall'intensità della forza, ma anche dall'angolo formato tra la direzione della forza applicata e il piano della porta: tale effetto risulta massimo se le due direzioni sono perpendicolari, ma per valori minori di 90° andrà diminuendo in proporzione a tale angolo. E ancora: la rotazione sarà tanto più rapida, a parità di forza applicata e di angolo di incidenza con il piano della porta, quanto più il punto di applicazione della forza risulterà distante dall'asse di rotazione (il cardine). Riassumendo, la rotazione di un corpo esteso dipende:

-) dall'intensità della forza **F** applicata

-) dalla direzione della forza **F**

-) dalla distanza **r** tra il punto attorno a cui avviene la rotazione (detto *polo*) e la direzione della retta su cui giace **F**. (Si ricordi che per calcolare la distanza tra un punto e una retta bisogna tracciare da tale punto il segmento di perpendicolare rispetto alla retta considerata).

Tali affermazioni possono essere facilmente provate in laboratorio agganciando una sbarra di legno o di plastica ad un sostegno metallico tramite un perno passante per un foro posizionato proprio nel centro dell'oggetto. In questo modo il sistema è in perfetto equilibrio e la sbarra è libera di ruotare attorno al suo perno centrale. La sbarra è costruita in modo tale da presentare per tutta la sua lunghezza dei piccoli fori equispaziati a cui è possibile agganciare dei pesini campione. Tali pesini alterano la situazione di equilibrio preesistente e la sbarra si mette a ruotare attorno all'asse passante per il perno centrale.

Se ora cerchiamo di riottenere una situazione di equilibrio utilizzando un differente numero di pesini sospesi a distanze diverse dal centro della sbarra, ci accorgiamo che tale condizione è raggiunta solo quando il prodotto tra il valore della forza peso **F** per la distanza dal perno centrale è numericamente uguale da ambo i lati della sbarra. In definitiva, quello che conta ai termini dell'equilibrio per la rotazione non è solo il valore numerico delle intensità delle forze applicate, ma anche la distanza tra il loro punto di applicazione e il punto dell'oggetto attorno al quale avviene la rotazione.

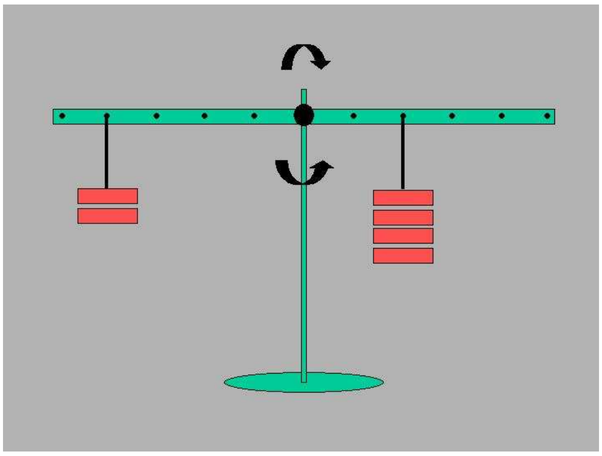

Fig. 2 - *La situazione di equilibrio della sbarra è raggiunta quando il valore numerico dell'intensità della forza applicata (numero di pesini campione) moltiplicato per la distanza tra la forza e il perno centrale attorno al quale avviene la rotazione (detto" polo") è uguale da ambo i lati.*

Definiamo *momento di una forza **F** rispetto ad un punto O detto polo*, il prodotto tra l'intensità della forza e la distanza che esiste tra il punto O attorno a cui avviene la rotazione e la direzione della retta su cui giace **F**. Tale distanza è detta braccio.

$$\mathbf{M} = \mathbf{F} \cdot \text{braccio}$$

Il *momento di una forza* appare così un indicatore della *capacità di una forza di indurre una rotazione in un corpo rigido esteso attorno alla retta prescelta come asse passante per il polo*: se il momento è nullo, non si ha rotazione. Per valori diversi da zero, invece, la rotazione avviene.

Il momento è una grandezza vettoriale, quindi ha anche una direzione ed un verso. La direzione è quella dell'asse di rotazione. Il verso è assunto di segno positivo se la rotazione è antioraria, di segno negativo se la rotazione è oraria.

Le **unità di misura** del momento sono N · m

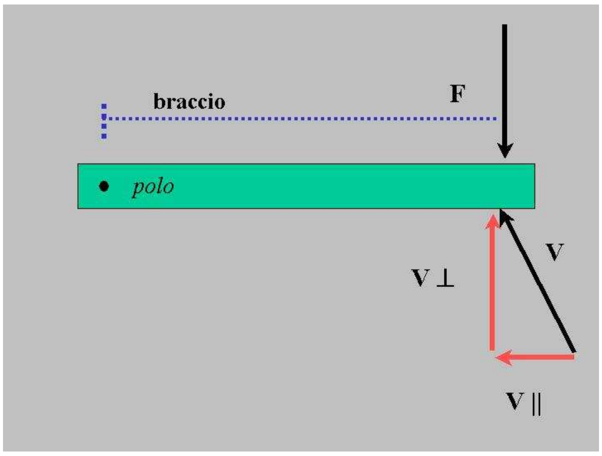

*Fig. 3 - Braccio di una forza **F** rispetto all'asse di rotazione passante per il polo. Nel caso in cui la forza non sia perpendicolare alla sbarra, come per il vettore **V**, è utile considerare la componente parallela e perpendicolare di **V**. L'unico momento diverso da zero è dato dalla componente perpendicolare della forza $\mathbf{V}_{\perp}$. Infatti la componente **V** || non è in grado di causare una rotazione della sbarra attorno al polo.*

Un semplice procedimento per calcolare il momento di una forza **V** di direzione non perpendicolare alla sbarra consiste nello scomporre il vettore nelle sue due componenti, rispettivamente parallela e perpendicolare alla sbarra rigida (*Fig. 3*). Il momento relativo alla componente parallela è nullo, perché tale vettore giace su di una retta passante per il polo e non può causare nessuna trotazione. L'unico momento diverso da zero rimane così quello relativo alla componente perpendicolare di **V**, che assume il seguente valore:

$$\mathbf{M} = \mathbf{V}_{\perp} \cdot \mathbf{braccio}$$

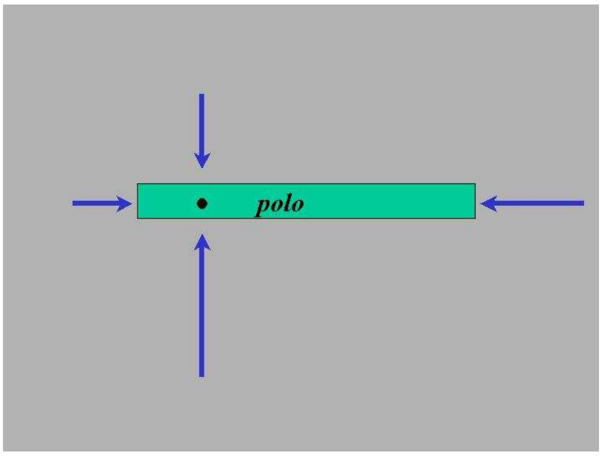

Fig. 4 - Se la direzione di una forza applicata ad un oggetto esteso passa per il polo, tale forza ha momento nullo. Infatti, nessuna delle quattro forze indicate può causare una rotazione della sbarra attorno al punto considerato.

12.4 EQUILIBRIO PER LA ROTAZIONE

Vale la seguente regola:

Se un corpo è in equilibrio per la rotazione, allora il momento totale di tutte le forze ad esso applicate è nullo. Quindi

$$\boldsymbol{M}_{tot} = 0$$

Nell'eseguire i conti relativi alla somma dei momenti di tutte le forze (che ricordo essere una somma *vettoriale*), si assume per convenzione che il segno sia positivo nel caso di una rotazione *antioraria*, negativo nel caso di una rotazione *oraria*.

12.5 LE LEVE

Una utilissima applicazione dei concetti inerenti all'equilibrio per la rotazione e alla definizione di momento di una forza rispetto ad un punto, riguarda la giustificazione teorica del funzionamento delle leve.

Le leve possono essere classificate in tre tipi, a seconda della posizione reciproca del punto attorno al quale avviene la rotazione, il **fulcro F**, del punto di applicazione della forza applicata dall'esterno, la **potenza P**, e del punto di applicazione della forza che deve essere vinta, detta **resistenza R**.

(b) LEVE DI PRIMO GENERE

In tale caso il fulcro F assume una posizione intermedia tra la potenza e la resistenza. Detti D_1 e D_2 i bracci di queste due forze, in una situazione di equilibrio la somma dei momenti deve essere nulla. Per cui vale:

$$P \cdot D_1 - R \cdot D_2 = 0$$

$$P \cdot D_1 = R \cdot D_2$$

Per vincere la resistenza R occorre quindi applicare una potenza P la cui intensità è data dal rapporto tra le lunghezze dei bracci D_1 e D_2 .

$$P = R \cdot D_2 / D_1$$

Se $D_2 > D_1$ si ha come conseguenza che la potenza applicata è maggiore della resistenza. In questo caso la leva è **svantaggiosa.** Se invece $D_2 < D_1$ l'intensità della potenza necessaria per causare la rotazione (vincendo la resistenza R) è minore di R. Si parla allora di una leva **vantaggiosa.**

Esempi di leve di primo genere sono: le forbici, le tenaglie, l'altalena, i remi della barca …

a) LEVE DI SECONDO GENERE

In questo tipo di leve è la resistenza **R** ad assumere una posizione intermedia tra la potenza **P** e il fulcro **F** . Detti D_1 e D_2 i bracci delle due forze rispetto al fulcro, in una situazione di equilibrio la somma dei momenti deve essere nulla. Per cui vale ancora:

$$P \cdot D_1 - R \cdot D_2 = 0$$

$$P \cdot D_1 = R \cdot D_2$$

Anche in questo secondo caso, per vincere la resistenza R occorre applicare una potenza P la cui intensità è data dal rapporto tra le lunghezze dei bracci D_1 e D_2 .

$$P = R \cdot D_2 / D_1$$

Nelle leve di secondo genere, però, si ha sempre che $D_2 < D_1$. L'intensità della potenza necessaria per vincere la resistenza R è, in questo caso, sempre minore di R. Queste leve sono sempre **vantaggiose.**

Esempi di leve di secondo genere sono: lo schiaccianoci, la carriola …

LEVE DI TERZO GENERE

Nelle leve di terzo genere è la potenza **P** ad assumere una posizione intermedia tra la resistenza **R** e il fulcro **F**. Detti, come nei due casi precedenti, D_1 e D_2 i bracci delle due forze rispetto al fulcro, nella situazione di equilibrio la somma dei momenti deve essere nulla. Per cui vale sempre:

$$P \cdot D_1 - R \cdot D_2 = 0$$

$$P \cdot D_1 = R \cdot D_2$$

Anche in questo terzo caso, per vincere la resistenza R occorre applicare una potenza P la cui intensità è data dal rapporto tra le lunghezze dei bracci D_1 e D_2 .

$$P = R \cdot D_2 / D_1$$

Nelle leve di terzo genere, però, si ha sempre che $D_2 > D_1$. L'intensità della potenza P necessaria per vincere la resistenza R è, in questo caso, sempre maggiore di R. Queste leve sono sempre **svantaggiose.**

Esempi di leve di terzo genere sono: le pinzette per raccogliere piccoli oggetti o per le sopracciglia, gli attrezzi per depositare ceppi ardenti nel camino, le pinze del ghiaccio …

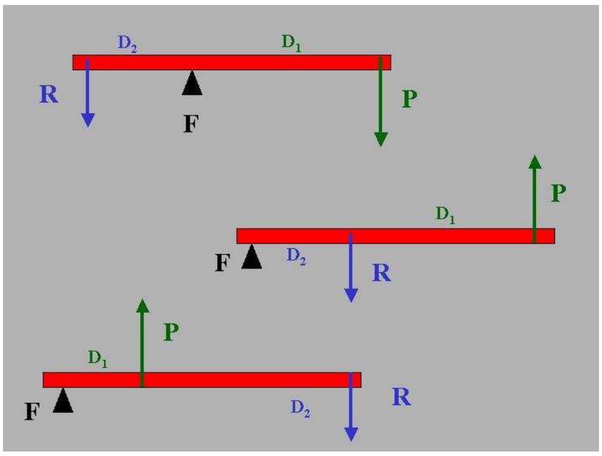

Fig. 5 *– Leve di primo, secondo e terzo genere.*

L'utilità delle leve vantaggiose è evidente a tutti: tramite l'applicazione di forze di piccola intensità si possono vincere resistenze anche estremamente elevate. Proprio questa proprietà delle leve fece esclamare ad Archimede la celebre fase:" … datemi un punto d'appoggio e vi solleverò il mondo ! ".

Anche le leve svantaggiose, però, hanno la loro utilità. Nessuno dubita della comodità delle pinze atte a gestire oggetti dalla temperatura molto alta o molto bassa: ceppi ardenti, metalli incandescenti o, più semplicemente, banali cubetti di ghiaccio. Ma l'importanza delle leve svantaggiose non si ferma qui. Quando una leva con queste caratteristiche ruota attorno al suo fulcro, la potenza P, che ha un piccolo braccio, compie un piccolo spostamento mentre la resistenza R, che ha un braccio elevato, compie uno tragitto decisamente maggiore. Ecco allora che ciò che viene perso in termini di intensità di forze applicate viene guadagnato sotto forma di spostamento. In definitiva, se dovrò vincere gli effetti di una resistenza di grande intensità sarà bene utilizzare una leva vantaggiosa. Se invece dovrò ottenere un notevole spostamento dell'oggetto che causa la forza resistente R (ovviamente di intensità non troppo elevata), sarà sicuramente più utile fare ricorso ad una leva svantaggiosa.

12.6 IL BARICENTRO

Quando si studia la rotazione di un corpo rigido esteso è necessario considerare anche il punto di applicazione delle forze in gioco. Tale informazione contribuisce al calcolo dei momenti delle forze e determina le caratteristiche del moto di rotazione così come le condizioni perché esso non avvenga. E' quindi importante che il punto di applicazione di ogni forza, compreso la forza peso, sia individuato con estrema precisione.

Determinazione sperimentale del baricentro. Consideriamo un oggetto dalla forma generica, irregolare, eterogeneo ed asimmetrico ed applichiamo un semplice procedimento sperimentale. Appendiamo l'oggetto ad una corda e lasciamolo libero di oscillare fino a che raggiunge la posizione di equilibrio. In tale situazione il momento delle forze in gioco rispetto al punto attorno al quale avviene la rotazione (il punto di sostegno) deve essere nullo. Se così non fosse l'oggetto si muoverebbe ancora di moto rotatorio fino a raggiungere, in posizione diversa, una situazione di reale equilibrio.

Analizziamo ora le forze in gioco. E' facile rendersi conto che esse sono solo due: la reazione vincolare **R** del filo che sostiene il corpo, il cui punto di applicazione coincide con il punto di sostegno, e la forza peso **P** relativa all'oggetto il cui punto di applicazione è, per ora, ignoto. Poiché la direzione della forza **R** (che sostiene l'oggetto) attraversa il punto attorno a cui avviene la rotazione (il polo), il suo momento rispetto a tale punto è nullo. Non può essere tale forza **R**, quindi, a causare il movimento rotatorio dell'oggetto e a portarlo in situazione di equilibrio qualora esso non lo fosse.

Si consideri ora il corpo nella sua posizione di equilibrio e si tracci la retta verticale che rappresenta il prolungamento della corda a cui l'oggetto è appeso: abbiamo ragione di credere che il punto di applicazione della forza peso **P**, finora completamente ignoto, debba inevitabilmente trovarsi su tale retta. In caso contrario, infatti, il corpo non si troverebbe in equilibrio perché il momento della forza peso rispetto all'asse di rotazione (passante per il punto di sostegno della corda) non sarebbe nullo.

Si ripeta ora tutta la procedura appendendo l'oggetto ad un punto diverso dal precedente: per gli stessi motivi esposti in precedenza, quando l'oggetto raggiunge la posizione di equilibrio il punto di applicazione della forza peso deve trovarsi ancora sulla retta che rappresenta la continuazione verticale della corda di sostegno. Il punto **O** d'incontro tra questa retta e quella considerata in precedenza è la posizione cercata.

Il punto così trovato ha una importanza fondamentale e viene chiamato **baricentro**. In definitiva, si definisce baricentro il *punto in cui si può pensare applicata la forza peso di un oggetto esteso*. In pratica è *come se l'oggetto intero potesse essere considerato puntiforme con tutta la sua massa concentrata in tale punto.*

Il metodo che è stato appena illustrato consente la **determinazione sperimentale della posizione del baricentro** in tutti gli oggetti, anche quelli dalla forma irregolare, eterogenei e non uniformi.

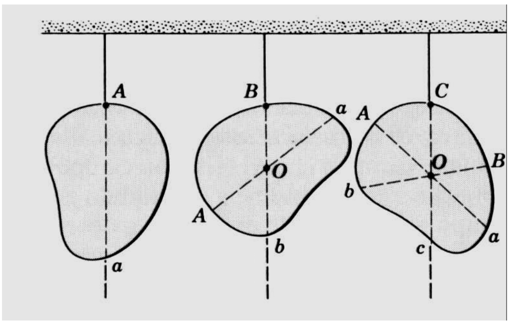

Fig. 6 – *Determinazione sperimentale del baricentro: il baricentro si trova sempre sulla verticale passante per il punto di sospensione. Se così non fosse, il momento della forza peso rispetto al punto di sostegno non sarebbe nullo: l'oggetto ruoterebbe fino a raggiungere, in una posizione diversa, una nuova configurazione di equilibrio.*

Vediamo ora di dare una definizione più rigorosa e formale di *baricentro*. Ogni corpo esteso di massa M può essere considerato come costituito dall'unione di un numero molto grande di elementi infinitesimi, ognuno di massa m_i . Ogni elemento sarà contraddistinto da una sua forza peso, data dal seguente vettore diretto verso il basso:

$$\mathbf{P}_\mathrm{i} = m_i\ \mathrm{g}$$

Se ora consideriamo la risultante di tutte queste infinitesime forze peso, abbiamo:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{\infty} m_i g$$

Definiamo **baricentro** *il punto di applicazione della risultante delle singole forze peso applicate ad ogni elemento infinitesimo di massa m_i in cui posso suddividere un corpo esteso*

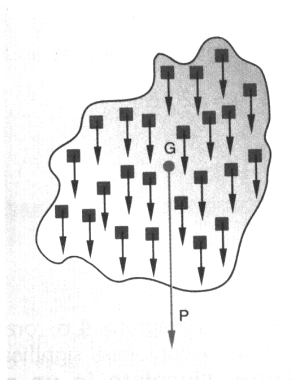

Fig. 7 - *Definizione di baricentro*

Tale punto, se il corpo in questione è omogeneo e simmetrico, coincide semplicemente con il *centro geometrico* dell'oggetto. Si noti che il baricentro può anche *non appartenere* al corpo in questione: il baricentro di una ciambella circolare, ad esempio, è il centro della circonferenza e tale punto non appartiene all'oggetto considerato.

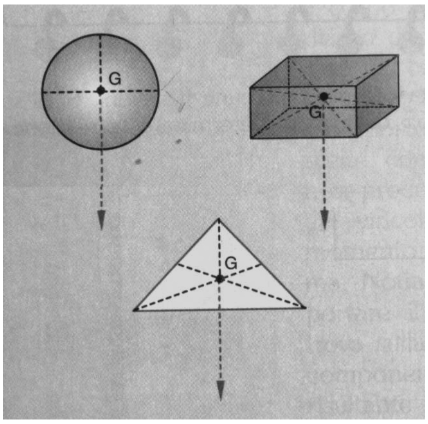

***Fig. 8 –** In oggetti omogenei e simmetrici il baricentro coincide con il centro geometrico dell'oggetto(per un triangolo è il punto di incontro delle mediane)*

(c) **Baricentro ed equilibrio.** In generale, le considerazioni esposte nella parte precedente trovano una efficace sintesi affermando che:

1) Un corpo rigido esteso sospeso per un punto si trova in una posizione di equilibrio se il suo baricentro si trova sulla verticale passante per il *punto di sospensione*.

2) Un corpo rigido esteso appoggiato ad un sostegno piano si trova in equilibrio se la verticale passante per il baricentro cade all'interno della *base d'appoggio*.

Si dice, inoltre, che l'equilibrio è:

a) **stabile**, se il corpo, allontanato dalla posizione di equilibrio, tende naturalmente a ritornarvi

b) **indifferente**, se il corpo, allontanato dalla posizione di equilibrio, non vi ritorna, ma rimane comunque in una nuova posizione di equilibrio

c) **instabile**, se il corpo, allontanato dalla posizione di equilibrio, tende ad allontanarsi sempre più da essa.

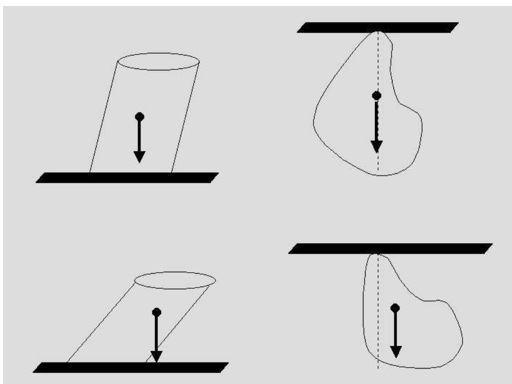

***Fig. 9 –** Corpi estesi in equilibrio (i primi due) e in una posizione di non equilibrio (gli ultimi due).*

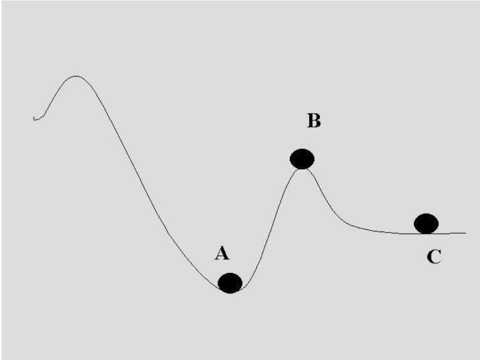

Fig. 10 – *La pallina che si muove lungo il profilo verticale rappresentato in figura, si trova in equilibrio stabile in A, in equilibrio instabile in B, in equilibrio indifferente nel tratto piano C.*

A causa di queste ultime considerazioni, un corpo esteso che presenti un baricentro molto basso, si troverà in una condizione di equilibrio maggiormente stabile di un corpo analogo che presenti un baricentro in posizione più elevata. E questo perché, con un baricentro basso, bisogna alterare di molto la posizione di equilibrio del corpo per far sì che la direzione della forza peso cada al di fuori della base di appoggio dell'oggetto. Con un baricentro alto può accadere, invece, che una piccola variazione di posizione dalla situazione di equilibrio crei le condizioni per il "ribaltamento" dell'oggetto.

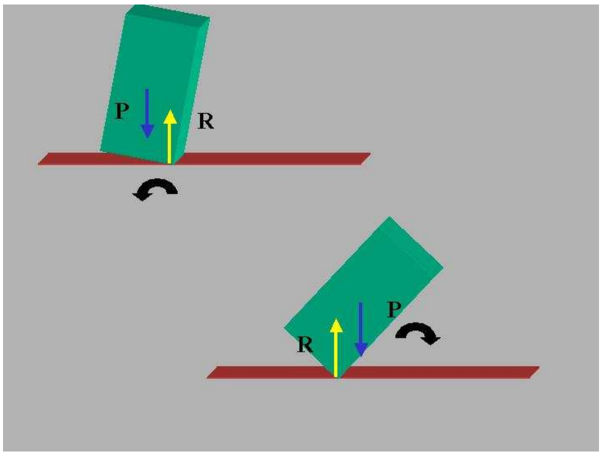

Fig. 11 *- La forza peso **P** cade all'interno della base di appoggio dell'oggetto. Il sistema è in equilibrio stabile e, perturbata di poco la posizione del corpo, esso ritorna alla situazione di partenza. Questo avviene perché l'unico momento diverso da zero rispetto al punto di rotazione (lo spigolo in basso a destra) è quello causato dalla forza **P** che induce una rotazione in senso antiorario e che riporta l'oggetto ad appoggiarsi completamente sul tavolo orizzontale. Il momento della reazione vincolare del tavolo **R** è nullo perché è applicato sullo spigolo attorno al quale avviene la rotazione* **(in alto)**. *La forza peso **P** cade all'esterno della base di appoggio dell'oggetto. Il sistema NON è più in equilibrio. Questo avviene perché l'unico momento diverso da zero rispetto al punto di rotazione (lo spigolo in basso a destra, come nel caso precedente) è quello causato dalla forza **P** che induce ora una rotazione in senso orario e che porta l'oggetto ad allontanarsi dal tavolo di appoggio e a ribaltarsi. Il momento della reazione vincolare del tavolo **R** è nullo anche questa volta, sempre perché il vettore è applicato sullo spigolo attorno al quale avviene la rotazione* **(in basso).**