Capitolo 15

La legge di gravitazione universale

15.1. Newton e la “Legge di gravitazione universale”

Il sistema cosmologico copernicano, grazie alle osservazioni di Galileo e dopo la modifica della forma delle orbite planetarie introdotta da Keplero, inizia a diffondersi con sempre maggiore successo nel corso del Seicento anche se continuano a sussistere problemi di natura sia scientifica che filosofica.

Il punto più critico sembra essere il seguente: se nella nuova visione dell’Universo non c’è più posto per le sfere cristalline e il Motore Immobile, *qual è allora la vera causa del moto dei pianeti e delle stelle ?*

La risposta viene da Isaac Newton (1642-1727), secondo il quale il moto dei corpi celesti deve essere spiegato introducendo una forza “universale”, detta *forza gravitazionale*, che agisce su tutti i corpi dotati di massa attirandoli gli uni verso gli altri e che di fatto rappresenta *la naturale generalizzazione della forza peso al mondo celeste!!*

Newton attraverso un sottile ragionamento che si fonda su coraggiose analogie da lui individuate tra l’accelerazione di gravità terrestre e l’accelerazione centripeta relativa al moto della Luna attorno alla Terra, dimostra che tale forza è direttamente proporzionale al prodotto delle due masse considerate (M e m) e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza R. Detta G la costante di proporzionalità (*costante di gravitazione universale)*, Newton arriva a dimostrare che il modulo di F è calcolabile attraverso la seguente espressione:

$$\boxed{F = G\frac{M\,m}{R^2}}$$

Il verso di F è diretto lungo il segmento congiungente le due masse in modo che la forza gravitazionale risulti sempre attrattiva. Il valore di G sarà determinato con precisione alla fine del Settecento.

Secondo Newton, quindi, *il moto di un sasso in caduta libera sulla Terra e il moto dei pianeti e dei corpi celesti in generale sono regolati dalla stessa forza*, che a ragione può essere chiamata **universale**.

La fisica di fine Seicento appare così in grado di comprendere in un unico sistema di leggi sia i fenomeni terrestri che quelli celesti. La matematica e la geometria diventano il linguaggio che rende possibile questo gigantesco passo. Così facendo Newton contribuisce all'opera di scardinamento della filosofia naturale aristotelica estendendo la validità delle leggi terrestri al cielo e quindi rimuovendo definitivamente quella distinzione tra il corruttibile mondo sublunare e il mondo celeste che nella fisica di Aristotele necessitavano di leggi separate per essere interpretati !!

Nasce, però, un problema di tipo nuovo.

E' ancora radicata nella cultura scientifica del tempo l'ipotesi, tutta aristotelica, che le forze possano agire sugli oggetti materiali solo attraverso il "contatto" tra corpo e corpo: in che modo, allora, la forza gravitazionale può far sentire il suo influsso su stelle e pianeti? La Luna e la Terra non sono certo a contatto!! Lo stesso problema si ripresenterà nel corso dell'Ottocento per spiegare l'attrazione e la repulsione tra cariche elettriche.

A tale proposito, Newton, con grande umiltà, confessa la sua incapacità di suggerire spiegazioni ragionevoli che possano interpretare la natura di una forza "a distanza" come la gravitazione sembra essere, affermando: "*Hypoteses non fingo*" ("Non avanzo ipotesi"). I suoi contemporanei, invece, nel disperato tentativo di spiegare un fenomeno altresì misterioso, non esitano a riesumare il concetto aristotelico di *etere*: una sostanza immateriale, trasparente, elastica, incorruttibile . . . che riempie di sé l'intero Universo e che riveste ora il duplice scopo di rappresentare il supporto materiale alla "propagazione a distanza" della forza gravitazionale e di evitare il vuoto (*horror vacui*) che si potrebbe formare tra un corpo celeste e l'altro in un universo che appare enormemente più esteso di quanto non avessero mai potuto concepire la cultura greca e quella rinascimentale.

Può così prendere vita l'idea di **forza a distanza** che si affianca a quella aristotelica di **forza a contatto.**

Si tratta, in realtà di una soluzione criticabile, che evidenzierà tutta la sua inadeguatezza quando gli esperimenti di Michelson e Morley alla fine dell'Ottocento dimostreranno senza ombra di dubbio l'inesistenza dell'etere.

15.2. Cavendish "pesa" la Terra e calcola G

La costante G è una grandezza fisica di difficile misura sperimentale perché la gravità è una forza molto più debole delle altre interazioni fondamentali e nessun apparato strumentale può essere schermato dalla interazione gravitazionale con l'ambiente circostante. Due corpi di massa 1 kg posti a 1 metro di distanza si attirano infatti con una forza di soli $6{,}67 \times 10^{-11}$ N !!

Nel 1798 *Henry Cavendish,* con l'intenzione di misurare il valore della densità della Terra, realizza un'esperienza passata poi alla Storia. Il suo procedimento sperimentale gli consente tra le altre cose di arrivare anche alla determinazione di G in modo molto accurato e di fornire il valore:

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}.$$

Cavendish usa uno strumento detto *bilancia a torsione*, il cui funzionamento in linea di principio è tanto semplice quanto invece appare complessa la sua realizzazione sperimentale.

La bilancia consiste di un braccio alle cui estremità sono collegate due masse sferiche *m*. Il braccio è sospeso attraverso un filo di quarzo collegato al suo baricentro ed è libero di ruotare su se stesso. In prossimità delle due masse *m* vengono poste, esternamente al braccio della bilancia e fissate a terra, due altre masse M di entità maggiore. L'attrazione gravitazionale

$$F_{gravit} = G\frac{M\,m}{R^2}$$

che si esercita tra le due coppie di sfere *m* e M introduce nel sistema un momento di forze diverso da zero che pone il braccio della bilancia in rotazione. Il filo di quarzo che sostiene l'apparato inizia a torcersi e a sviluppare una forza repulsiva elastica di torsione quantificabile con la legge di Hooke. Chiamiamo $\Delta\alpha$ l'angolo di rotazione del filo rispetto alla posizione iniziale di equilibrio e k la costante elastica di torsione il cui valore, ottenuto precedentemente in laboratorio attraverso un procedimento di taratura, dipende come nel caso delle molle dalle caratteristiche del materiale di cui è composto il filo. Quindi:

$$F_{torsione} = k\,\Delta\alpha$$

Quando la rotazione del braccio si arresta, siamo in una situazione di equilibrio: i due momenti sono ora uguali, per cui, a parità di lunghezza dei bracci, anche le forze risultano di uguale intensità:

$$G\frac{M\,m}{R^2} = k\,\Delta\alpha$$

Poiché tutte le grandezze che compaiono nell'equazione sono state misurate in laboratorio con buona precisione, è immediato ricavare il valore di G.

In realtà non è affatto semplice ottenere con buona accuratezza le misure che servono, in particolare quella relativa all'angolo di torsione $\Delta\alpha$ del filo. A tal fine si fa ricorso ad uno stratagemma di tipo ottico. Un piccolo specchio è collegato al filo che sostiene il braccio della bilancia e un raggio di luce lo illumina quando si trova in posizione di riposo: il raggio viene riflesso e va a colpire un'asta graduata posta ad una certa distanza dall'apparato. A questo punto una qualunque piccola variazione della posizione del filo causata dalla sua torsione sposta anche la direzione del raggio riflesso. Si può così ottenere una misura precisa dell'angolo $\Delta\alpha$ di rotazione del filo andando a misurare lo scostamento della posizione in cui il raggio riflesso colpisce l'asta graduata.

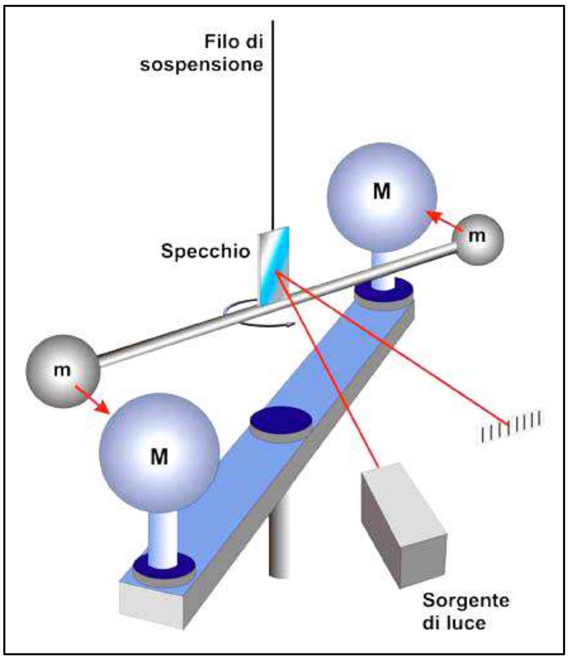

Fig. 1 - S*chema della bilancia a torsione usata da Cavendish.*

L'esperienza consente la determinazione sperimentale di G con una elevata accuratezza, mai raggiunta prima. Ma il vero scopo di Cavendish era la misura della *densità della Terra*, risultato ottenibile solo attraverso la conoscenza della massa e del volume terrestre.

Il raggio R della Terra è però noto alla fine del Settecento con buona precisione, e da questo è immediato ottenere il volume V del pianeta. Per la determinazione della massa terrestre M, Cavendish usa la relazione che lega la forza peso al valore della forza gravitazionale misurata al suolo:

$$F_{gravit} = F_{peso}$$

$$G\frac{M\,m}{R^2} = mg$$

$$M = \frac{g\,R^2}{G}$$

Ricordando che la densità δ è il rapporto tra la massa M e il volume V di un corpo, l'esperimento fornisce un valore molto vicino a quello oggi comunemente accettato: $\delta = 5\,500$ kg/m^3.

Confrontando tale risultato con la densità superficiale delle rocce terrestri, $\delta = 2\,800$ kg/m^3, Cavendish é il primo a scoprire che gli strati più interni e profondi del nostro pianeta devono avere una densità di gran lunga superiore rispetto a quella che osserviamo in superficie.

Per questi risultati Cavendish passa alla Storia come l'uomo che "pesò" la Terra anche se, a rigor di logica, questa affermazione non può proprio dirsi scientificamente corretta…!!

15.3. La forza gravitazionale e la forza peso

L'ipotesi newtoniana secondo la quale la forza di gravitazione universale rappresenta la generalizzazione della forza peso, ci porta a considerare la seguente uguaglianza:

$$F_{\ peso} = F_{\ gravitazione}$$

da cui segue immediatamente che:

$$mg = G\,\frac{M\,m}{R^2}$$

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

Tale espressione consente di calcolare il valore dell'accelerazione di gravità g anche in punti notevolmente lontani dalla superficie terrestre, dove M è la massa terrestre e R la distanza dal centro della Terra. Posto R uguale al raggio terrestre (circa 6 370 km) si ritrova il valore già noto per via sperimentale: $g = 9{,}81\ m/s^2$.

15.4. La forza gravitazionale e la terza legge di Keplero

La legge di gravitazione universale contiene in modo implicito la terza legge di Keplero.

Supponiamo per semplicità di calcolo che le orbite dei pianeti siano circolari: il valore dell'eccentricità delle orbite è così basso (escluso il caso di Plutone) che l'errore che si introduce con una tale approssimazione è molto piccolo. Il moto risulta così essere circolare uniforme, con la forza di gravitazione universale che riveste il ruolo di forza centripeta. In formule:

$$F_{centripeta} = F_{\ gravitazionale}$$

$$\frac{m\,\mathrm{v}^2}{R} = G\,\frac{M\,m}{R^2}$$

Ricordando ora che in moto circolare uniforme la velocità tangenziale v può essere scritta in questo modo:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

sostituendo v nell'espressione precedente, e semplificando per *m*, si ottiene:

$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2\,R} = G\frac{M}{R^2}$$

$$\frac{R^3}{T^2} = G\frac{M}{4\pi^2}$$

$$\frac{R^3}{T^2} = k$$

dove nell'ultima espressione si è posto $k = G\frac{M}{4\pi^2}$.

Abbiamo così ottenuto la terza legge di Keplero dove, come è noto, la costante k dipende solo dal corpo centrale, anzi, solo dalla sua massa M.

15.5. La velocità orbitale

Nell'approssimazione di orbite circolari, uguagliando forza centripeta e forza di gravitazione universale, è immediato ottenere una semplice espressione della velocità orbitale:

$$F_{centripeta} = F_{gravitazionale}$$

$$\frac{m v^2}{R} = G\frac{M\,m}{R^2}$$

Semplificando *m* e ricavando la velocità si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M}{R}}$$

Si noti come tale valore dipenda da R; le orbite di raggio maggiore sono percorse più lentamente, in accordo con quanto affermato dalla seconda legge di Keplero.

15.6. La forza gravitazionale è conservativa

Una forza F si dice *conservativa* se è possibile dimostrare che:

1. *il lavoro L per andare da un punto di partenza A ad uno finale B non dipende dal particolare percorso seguito, ma solo dalla posizione di A e di B*
2. oppure, in modo analogo, che *il lavoro L lungo un percorso chiuso (dove A e B coincidono) è sempre nullo.*

Poiché la forza di gravitazione universale è una generalizzazione della forza peso, e questa è conservativa, è lecito chiedersi se anche la forza gravitazionale lo sia.

Per dimostrarlo, consideriamo una massa M fissa e una massa *m* posta nel punto A ad una distanza R_A da M. Calcoliamo ora il lavoro L della forza di gravità per spostare *m* da A a B. E' noto dalla meccanica che l'espressione per ottenere L è data da:

$L = F\,\Delta S \cos\alpha$

ma sappiamo anche che ciò è possibile solo quando F è costante e ΔS è uno spostamento rettilineo. Ora, la forza gravitazionale non è costante in quanto varia con l'inverso del quadrato della distanza. Siamo così obbligati a seguire un'altra strada per il calcolo di L.

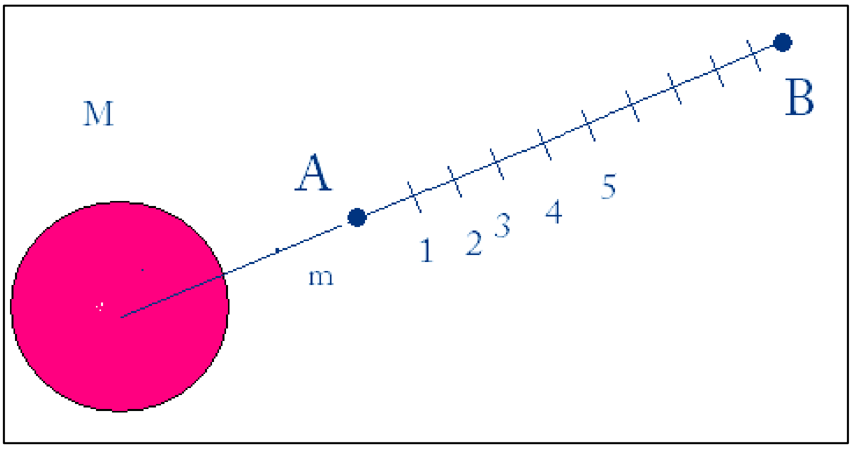

Fig. 2 - *Nel calcolo del lavoro della forza gravitazionale il tratto AB deve essere suddiviso in una infinità di segmenti infinitesimi in modo da considerare* **F** *"costante" in ognuno di essi.*

Proviamo quindi a suddividere il percorso AB in una infinità di piccolissimi tratti rettilinei che possiamo numerare in questo modo: A1, 12, 23, 34, 45, 56, 67 … *n*B, essendo *n* l'ultimo *ennesimo* segmento che ci separa dal punto d'arrivo B.

Consideriamo ognuno di questi tratti talmente piccolo che all'interno di ognuno di essi la forza F possa essere considerata "quasi" perfettamente costante. Prendiamo poi come valore di F all'interno di ogni tratto infinitesimo il valore medio tra il punto di partenza e quello di arrivo (ad esempio, il valore medio di F tra il punto 1 e il punto 2).

Per motivi atti a semplificare i conti, è più opportuno considerare il valore medio geometrico della distanza R che separa le masse.

Ricordiamo qui di seguito la differenza tra la media aritmetica e quello geometrica di due numeri. Dati due valori x_1 e x_2 definiamo *media aritmetica* e *media geometrica* le seguenti espressioni:

$$x_{aritm} = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad\qquad x_{geom} = \sqrt{x_1\, x_2}$$

Se x_1 e x_2 sono valori che differiscono di molto poco, le due medie danno risultati quasi identici. Ad esempio se $x_1 = 10{,}0$ e $x_2 = 10{,}2$ la media aritmetica fornisce il valore di 10,1 mentre quella geometrica il valore 10,099. La differenza risulta di un millesimo e sarebbe ancora minore se i due valori di partenza fossero più vicini.

Nel nostro caso, poiché i singoli segmenti hanno lunghezza infinitesima, la posizione dei due estremi differisce di pochissimo e quindi per esprimere la distanza media del generico spostamento 12 possiamo tranquillamente usare la media geometrica e scrivere:

$$F_{12} = G\frac{M\,m}{R_1\,R_2} \qquad \text{invece di} \qquad F_{12} = G\frac{M\,m}{\left(\dfrac{R_1 + R_2}{2}\right)^2}$$

Il lavoro della forza gravitazionale per spostare la massa *m* dal punto A a B è poi ottenuto come somma di tutti i singoli lavori infinitesimi in ognuno dei quali, essendo F “quasi costante”, posso finalmente usare la definizione di lavoro. Considerando inoltre che lo spostamento da A verso B ha verso opposto a quello della forza F, essendo questa attrattiva e quindi diretta da B verso A, si ha:

$\cos(\alpha) = \cos(180°) = -1.$

Arriviamo dunque a scrivere:

$$L_{AB} = L_{A1} + L_{12} + L_{23} + L_{34} + L_{45} + \ldots\ldots\ldots\ldots L_{nB}$$

dove

$$L_{A1} = -\frac{G\,M\,m}{R_A R_1}(R_1 - R_A) = -\frac{G\,M\,m}{R_A R_1}R_1 + \frac{G\,M\,m}{R_A R_1}R_A = -\frac{G\,M\,m}{R_A} + \frac{G\,M\,m}{R_1}$$

$$L_{12} = -\frac{G\,M\,m}{R_1 R_2}(R_2 - R_1) = -\frac{G\,M\,m}{R_1 R_2}R_2 + \frac{G\,M\,m}{R_1 R_2}R_1 = -\frac{G\,M\,m}{R_1} + \frac{G\,M\,m}{R_2}$$

$$L_{23} = -\frac{G\,M\,m}{R_2 R_3}(R_3 - R_2) = -\frac{G\,M\,m}{R_2 R_3}R_3 + \frac{G\,M\,m}{R_2 R_3}R_2 = -\frac{G\,M\,m}{R_2} + \frac{G\,M\,m}{R_3}$$

$$L_{34} = -\frac{G\,M\,m}{R_3 R_4}(R_4 - R_3) = -\frac{G\,M\,m}{R_3 R_4}R_4 + \frac{G\,M\,m}{R_3 R_4}R_3 = -\frac{G\,M\,m}{R_3} + \frac{G\,M\,m}{R_4}$$

……………………………..

$$L_{nB} = -\frac{G\,M\,m}{R_n R_B}(R_B - R_n) = -\frac{G\,M\,m}{R_n R_B}R_B + \frac{G\,M\,m}{R_n R_B}R_n = -\frac{G\,M\,m}{R_n} + \frac{G\,M\,m}{R_B}$$

Se ora sommiamo tutti i singoli lavori nel totale rimangono solo il primo e l’ultimo addendo. Tutti i termini intermedi compaiono sempre due volte con segno opposto e si annullano reciprocamente. In conclusione arriviamo a scrivere:

$$L_{AB} = -G\,M\,m\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

Nel risultato ottenuto non ci sono riferimenti alla lunghezza del percorso intrapreso per andare da A a B e nemmeno alla sua forma, rettilinea o curvilinea, ma solo alla posizione iniziale A e finale B. Questa particolarità è sufficiente per affermare che **la forza gravitazionale è conservativa**. Da ciò ne consegue che:

1. possiamo definire una funzione scalare detta *energia potenziale gravitazionale*
2. analogamente a quanto precedentemente dimostrato per la forza peso vale il *teorema di conservazione dell’energia.*

15.7. L’energia potenziale gravitazionale

La relazione tra lavoro L ed energia potenziale U è già stata espressa in precedenza sia per la forza elastica che per la forza peso, entrambe forze conservative, per le quali vale l’importante relazione:

$$L_{AB} = -\Delta U = U_A - U_B$$

Una tale proprietà si deve poter scrivere anche per la forza gravitazionale, definendo opportunamente l'energia potenziale.

Poiché abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente che nel caso gravitazionale si ha:

$$\boxed{L_{AB} = -G\,M\,m\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)}$$

risulta conveniente e logico introdurre *l'energia potenziale gravitazionale U* attraverso la seguente definizione:

$$U_A = -\frac{G\ M\ m}{R_A} \qquad\qquad U_B = -\frac{G\ M\ m}{R_B}$$

Più in generale, considerando un generico punto posto a distanza R dalla massa M

$$\boxed{U = -\frac{G\ M\ m}{R}}$$

In questo modo siamo in grado di estendere anche al caso gravitazionale la già nota relazione:

$$\boxed{L_{AB} = -\Delta U = U_A - U_B}$$

Si noti che:

1. l'energia potenziale gravitazionale può tranquillamente essere definita come il *lavoro fatto dalla forza di gravità per separare le due masse portandone una all'infinito*. Infatti, in tal caso $R_B \to \infty$ e il secondo denominatore dell'espressione L_{AB} tende a zero. Ne consegue che *l'energia potenziale gravitazionale è nulla quando le due masse sono a distanza infinita.*
2. *l'energia potenziale ha segno algebrico negativo*, quindi anche il lavoro della forza di gravità per allontanare le masse ha lo stesso segno. Si tratta cioè, di un *lavoro resistente*: per separare i corpi in questo caso bisogna compiere "lavoro positivo usando una forza esterna" al sistema. Quando un sistema fisico ha questa proprietà si dice che è un **sistema legato**. In tali sistemi il valore assoluto dell'energia potenziale fornisce il quantitativo di energia che è servito alla forza di gravità per creare il sistema avvicinando le due masse a distanza *R* e, analogamente, l'energia necessaria ad una eventuale forza esterna per distruggerlo allontanando le masse a distanza infinita.

Si osservi infine che abbiamo sempre supposto nulla la velocità delle due masse studiate. Analizziamo ora il caso in cui la massa più piccola ruoti attorno all'altra.

15.8. La velocità di fuga e la conservazione dell'energia

Consideriamo un corpo di massa *m* in orbita con velocità v attorno ad un oggetto più massiccio M. Supponiamo nulla la velocità di quest'ultimo corpo.

Poiché la forza gravitazionale è conservativa, posso applicare al sistema il teorema di conservazione dell'energia con cui è possibile esprimere l'energia totale *E* attraverso la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale:

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m \mathrm{v}^2 - G \frac{M\, m}{R}}$$

A seconda del valore assunto dall'energia totale E del sistema si possono presentare tre casi:

1. $E < 0$ l'oggetto di massa m entra in **orbita ellittica** attorno al corpo di massa M e l'orbita si dice *chiusa* o *legata*
2. $E > 0$ il corpo fugge lungo **un'orbita iperbolica** *aperta*
3. $E = 0$ la traiettoria dell'oggetto di massa m è ancora *aperta*. Il corpo fugge lungo un'**orbita parabolica**. E' questo il caso limite che separa le orbite chiuse (ellittiche) da quelle aperte (paraboliche o iperboliche).

Nel caso di un satellite artificiale lanciato dalla superficie terrestre la sua energia potenziale è fissata a priori dalla distanza "costante" tra il corpo e il centro della Terra (R = raggio terrestre) e dalle masse in gioco: è quindi la velocità di lancio a conferire al corpo la sua energia totale e, di conseguenza, a decidere il tipo di orbita. Al di sotto di un certo valore della velocità di lancio il satellite rimane legato al sistema terrestre: in caso contrario può sfuggire alla sua attrazione gravitazionale. Questa velocità limite si chiama **velocità di fuga** e può essere facilmente calcolata imponendo che *l'energia totale del satellite al momento del lancio sia nulla.* E' questo il valore minimo dell'energia totale che corrisponde al caso di orbite "aperte".

$$E_{lancio} = \frac{1}{2} m \mathrm{v}^2_{fuga} - G \frac{M\, m}{R_{Terra}} = 0$$

Esplicitando l'equazione rispetto alla velocità di fuga si ha:

$$\boxed{\mathrm{v}_{\mathrm{fuga}} = \sqrt{\frac{2GM}{R_{Terra}}}}$$

Inserendo i corretti valori numerici si ottiene:

$\mathrm{v}_{\mathrm{fuga}} = 11{,}18$ km/s.

Lasciamo allo studente la dimostrazione di un'ultima proprietà dei moti planetari. Nel caso dell'approssimazione relativa ad orbite circolari, si può scrivere la seguente relazione tra energia potenziale ed energia totale (si ricordi che la forza gravitazionale è a tutti gli effetti la forza centripeta agente sul corpo in orbita "circolare").

$$\boxed{E = \frac{1}{2} U\,.}$$

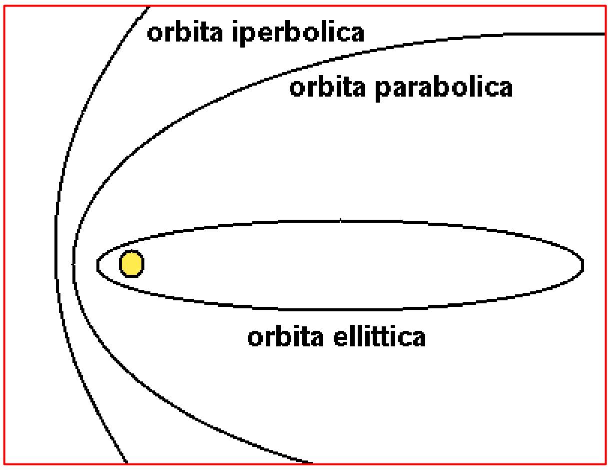

Fig. 3 - *I tre tipi di orbite possibili sono determinati dal valore dell'energia totale E del sistema.*