Capitolo 2

Gli errori

2.1. Errori casuali e sistematici

Ogni processo di misura di una grandezza fisica, anche se condotto nel modo più attento possibile e con lo strumento più sofisticato a disposizione, non consente di conoscere con assoluta precisione il valore cercato. I motivi di questa limitazione sono molteplici e vanno dalla precisione non infinita, ma limitata, dello strumento utilizzato, al modo di operare del tecnico di laboratorio, alla variazione imponderabile delle condizioni ambientali (umidità e temperatura dell'aria, campi elettrici e magnetici locali, attrito interno degli strumenti, presenza di polvere, spostamenti d'aria . . .). Tutto ciò implica che ogni risultato sia inevitabilmente accompagnato anche da un errore che impedisce la conoscenza perfetta e assoluta della grandezza in esame.

La parola **errore** assume in questo caso una valenza completamente diversa da quella di sbaglio, o di procedimento non corretto, volendo qui significare *l'inevitabile limite alla precisione con cui ogni misura di laboratorio può essere ottenuta.*

L'errore di sensibilità - Definiamo **sensibilità** *la più piccola quantità che uno strumento é in grado di misurare.*

Con un metro a nastro possiamo valutare la misura di una lunghezza fino al centimetro. Un normale righello da disegno ci consentirà di apprezzare il millimetro: con un "calibro" potremo arrivare al decimo di millimetro e con un "palmer" spingerci addirittura al centesimo di millimetro. Un metro a luce laser ci permetterà di valutare il millesimo di millimetro, ma non valori inferiori. Una sensibilità infinitamente piccola é tecnicamente impossibile da raggiungere, ed é per questo motivo che lo strumento usato, qualunque esso sia, ci consentirà di misurare una grandezza fisica solo fino ad un certo limite.

Supponiamo, ora, di usare un metro a nastro (del tipo di quello usato nei cantieri) per calcolare la lunghezza L di un banco scolastico e che tale valore cada attorno al valore

L = 78 cm.

Poiché lo strumento usato non ci consente di apprezzare i millimetri (e qualunque valutazione "ad occhio" é da evitare perché poco scientifica e poco seria), saremo costretti ad esprime il risultato nel modo seguente:

78 cm ± 1 cm

Questa notazione vuol dire che, nell'impossibilità di valutare il millimetro, dobbiamo supporre che:

.) la lunghezza considerata cade sicuramente tra 77 cm e 79 cm

.) il valore centrale dell'intervallo L = 78 cm risulta essere il valore più ragionevole da attribuire alla lunghezza del banco

.) l'errore dovuto alla sensibilità dello strumento ammonta a ± 1 cm (che rappresenta quindi il *limite di precisione* della misura).

Se invece eseguissimo la stessa misura con uno strumento più sensibile, potremmo arrivare a scrivere:

L = 78, 2 cm ± 0, 1 cm	con uno strumento di sensibilità pari a 0,1 cm
L = 78, 24 cm ± 0, 01 cm	con uno strumento di sensibilità pari a 0,01 cm
L = 78, 249 cm ± 0, 001 cm	con uno strumento di sensibilità pari a 0,001 cm.

Errori casuali - Torniamo a valutare la lunghezza L del banco scolastico utilizzando il metro a nastro (sensibilità di 1 cm). Ripetendo una decina di volte la misura ci aspettiamo di ottenere sempre lo stesso risultato che, come appena detto, dovremo esprimere in questa forma:

L = 78 cm ± 1 cm

Ripetiamo ora molte altre volte la stessa misurazione con uno strumento di sensibilità maggiore, in grado di valutare grandezze inferiori al millesimo di centimetro. Quello che accade è qualcosa di inatteso. I risultati, forse un po' sorprendentemente, iniziano a differenziarsi leggermente gli uni dagli altri e potrebbero essere così distribuiti:

78, 243 cm   78, 272 cm   78, 222 cm   78, 302 cm   78, 215 cm   78, 551 cm . . .

Come può essere spiegato un fatto del genere ? Esso é sicuramente contrario al nostro senso comune e la prima cosa che ci verrebbe da dire é che qualcosa NON sta funzionando come dovrebbe nelle misure che stiamo eseguendo. Ma non é così: l'aumento di sensibilità dello strumento ha fatto emergere di colpo i cosiddetti *errori casuali* o *statistici*. Il fenomeno é ben osservabile utilizzando in laboratorio una rotaia a cuscino d'aria e collegandola ad un cronometro di precisione in grado di valutare tempi inferiori al millesimo di secondo. Studiando il tempo impiegato da un carrellino a percorrere sulla rotaia uno spazio fissato, ripetendo la misura più volte e confrontando i tempi così ottenuti, si noterà facilmente che essi saranno tutti leggermente diversi tra loro.

Possiamo dare la seguente definizione: si dicono **casuali** *quegli errori regolati dalla "legge del caso" la cui origine é attribuibile ad una somma di fattori non sempre ben identificabili e che sono solo in parte prodotti dalla limitata precisione degli strumenti.* Come già affermato in precedenza, gli altri elementi in gioco sono l'inevitabile imperfezione dei sensi dell'osservatore, le variazioni causali delle condizioni ambientali (campi elettrici e magnetici terrestri, variazioni di temperatura ed umidità dell'aria, vibrazioni, attriti degli oggetti usati . . .), l'impossibilità di ripetere un esperimento più volte con modalità veramente identiche, gli attriti meccanici interni degli strumenti.

Tali errori hanno le seguenti caratteristiche:

-) sono perfettamente casuali, cioè si distribuiscono in ugual modo sia in eccesso che in difetto rispetto al valore "vero" della misura

-) non possono essere eliminati, in quanto connaturali ad ogni esperimento di laboratorio.

-) possono e devono, però, essere correttamente analizzati con uno studio di tipo statistico in cui si prenda in considerazione un numero molto elevato di misure eseguite con la stessa strumentazione e, per quanto possibile, nelle stesse condizioni ambientali. Vedremo più avanti come svolgere questo studio di tipo statistico.

Errori sistematici - Si definiscono **sistematici** *tutti quegli errori dovuti alla errata taratura di uno strumento oppure al suo uso improprio.*

Un esempio tipico di uso improprio é l'imprecisione che accompagna il cronometraggio manuale di intervalli di tempo estremamente brevi. L'inevitabile ritardo dovuto ai riflessi dello sperimentatore introduce un errore, che nel migliore dei casi, é compreso tra 2 e 5 decimi di secondo. Per questo motivo nelle gare di atletica leggera si fa largo uso di cronometraggi elettronici.

Un altro esempio di uso improprio si ha quando lo strumento é difettoso o tarato male. Una bilancia con l'indicatore di peso non perfettamente azzerato risulterà alterare sempre nello stesso senso (cioè sempre in eccesso o sempre in difetto) ogni misura effettuata.

Anche il cosiddetto *errore di parallasse*, errore dovuto ad un cattivo allineamento tra l'occhio dell'osservatore e la scala graduata dello strumento utilizzato, é causa di errori sistematici. Prendiamo, ad esempio, un termometro che sia posto sul muro ad un'altezza di circa un metro al di sopra della testa dell'osservatore. Poiché la colonnina di mercurio scorre in leggero rilievo rispetto alla scala graduata che ne dà posizione, se la lettura non é effettuata lungo una direzione ad essa perpendicolare ma é ottenuta, ad esempio, guardando dal basso verso l'alto, la rilevazione della temperatura sarà inevitabilmente sovrastimata perché il mercurio sembrerà arrivare in un punto diverso da quello effettivamente raggiunto.

In conclusione, possiamo affermare che gli errori sistematici:

-) su misure ripetute della stessa grandezza fisica alterano sempre della stessa quantità e sempre nello stesso verso il risultato finale (quindi in modo NON casuale)

-) a differenza dagli errori casuali e di sensibilità quelli sistematici sono errori veri, nel senso che introducono nel processo di misura uno "sbaglio". Possono (e devono) essere eliminati migliorando lo strumento utilizzato, correggendone i difetti e le modalità d'impiego, controllandone con attenzione il funzionamento e la taratura.

Per questo motivo, d'ora in avanti, supporremo che *l'unico errore inevitabilmente presente nelle nostre misure sia solo quello casuale.*

2.2. Errori assoluti e percentuali

Per tutto quanto detto in precedenza, affinché il nostro processo di misura sia scientificamente corretto, dovremo sempre comunicare il risultato con l'errore ad esso associato:

$$risultato = misura \pm errore$$

Quando l'errore é espresso nelle stesse unità di misura del valore sperimentale, come nel caso della sensibilità dello strumento, si parla di **errore assoluto** ε_{ass}.

Questa scrittura ha il pregio di essere particolarmente semplice e di facile comprensione, ma ha il difetto di rendere difficilmente confrontabili misure eseguite su oggetti diversi con errori assoluti differenti. Dobbiamo, infatti, considerare migliore la misura della statura di un uomo alto *1,80 m* con un errore assoluto di un millimetro o la rilevazione dell'altezza di una montagna che raggiunge la quota di *8 800 m* con un errore assoluto di un metro? Per rispondere a tale domanda si é soliti introdurre il concetto di **errore percentuale,** definito come *il rapporto tra l'errore assoluto e la misura, moltiplicato per cento.* In formule:

$$\varepsilon_{\%} = \frac{\varepsilon_{ass}}{misura} \times 100$$

Abbiamo così un errore dello 0, 056% sulla statura dell'uomo e dello 0, 01% sull'altezza della montagna. Infatti, eseguendo i conti:

$$\varepsilon_{\%}(uomo) = \frac{0{,}001\,m}{1{,}80\,m} \times 100 = 0{,}056\ \%$$

$$\varepsilon_{\%}(montagna) = \frac{1\ m}{8\ 800\,m} \times 100 = 0{,}011\ \%$$

I due errori possono ora essere confrontati e appare evidente come la seconda misura sia cinque volte migliore della prima.

2.3. Le cifre significative

Supponiamo di misurare l'altezza di tre studenti di una classe con un "metro a nastro" e di ottenere questi risultati: 180 cm, 182 cm, 179 cm. Se ora calcoliamo il valore medio x_m delle tre altezze otteniamo:

$$x_m = 180,\ 3333333\ .\ .\ .\ cm$$

Sicuramente non ha molto senso scrivere il risultato in questo modo: le infinite cifre decimali che compaiano sono frutto di una operazione aritmetica e non di un reale processo di misura. Il risultato deve allora essere riscritto considerando solo le **cifre significative**, cioè *le cifre effettivamente misurate più la prima incerta.*

Nel nostro caso, non potendo spingerci oltre il centimetro (sensibilità del metro a nastro), la misura dovrà avere un valore compreso tra 180 cm e 181 cm: le prime due cifre sono sicure, mentre la terza potrebbe essere uno 0 o un 1. Per scegliere tra i due risultati possibili si deve utilizzare quella che si chiama **regola di approssimazione**: *in una misura, se la prima cifra incerta è seguita da 0, 1, 2, 3, 4, essa viene arrotondata per difetto, mentre se è seguita da 5, 6, 7, 8, 9, viene arrotondata per eccesso.* In questo caso si perviene al seguente risultato:

$$x_m = 180\ cm$$

Occorre poi prestare attenzione alle seguenti precisazioni:

1) gli zeri non sempre sono cifre significative. Ad esempio: 56,4002 ha otto cifre significative; 12,400 ha cinque cifre significative se si suppone che sia stato possibile misurare anche il millesimo; 0,0026 ha invece solo due cifre significative, e in questo caso gli zeri iniziali non vengono considerati. La misura 35 000 è ambigua perché a chi legge non risulta chiaro il significato da attribuire alle ultime tre cifre: è stato possibile misurare anche l'unità oppure si tratta di una espressione già data in modo approssimato? Questo dubbio è risolvibile facendo ricorso, da parte di chi scrive, alla *notazione esponenziale* (o scientifica): l'espressione $3,5 \times 10^4$ vorrà allora significare che considero significative solo due cifre. In caso contrario devo scrivere $3,500 \times 10^4$.

2) Da quanto detto in precedenza si deduce che, se per la matematica i numeri come 3,5 o 3,500 sono la stessa cosa (anzi, la seconda scrittura è pure considerata inutile), per la fisica e le scienze sperimentali le due scritture hanno un significato molto diverso: nel primo caso si esprime un valore misurato solo fino al decimo, nel secondo caso la stessa grandezza risulta misurata con una precisione che raggiunge il millesimo!!

3) Può essere utile ricordare la definizione di **valore medio** x_m di una serie di N misure ripetute della stessa grandezza fisica:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}$$

2.4. Le approssimazioni

Eseguiamo ora una serie di misure ripetute, estraiamo da queste il valore medio e scriviamo il risultato con il corrispondente errore assoluto. Supponiamo che il valore sia il seguente:

misura = 4,7282 *cm* ± 0,04792 *cm*

Come possiamo esprimere il risultato nel modo corretto, tenendo conto solo delle cifre significative e non di quelle fornite dalla calcolatrice nell'eseguire il calcolo??

Notiamo come la prima cifra diversa da zero nell'errore assoluto sia il 4: questo vuol dire che l'errore sulla misura inizia con la seconda cifra decimale, cioè il centesimo. Come diretta conseguenza anche le cifre della misura inizieranno a diventare *incerte* a partire dal secondo decimale. E' allora ragionevole eseguire l'approssimazione in questo punto: le cifre che seguono non hanno significato nel senso che non sono state realmente misurate. Possiamo quindi definire **le cifre significative di una misura** *come le cifre effettivamente misurate dallo strumento più la prima incerta.*

Il risultato potrà essere così espresso:

misura = 4,73 *cm* ± 0,05 *cm*

dove si é eseguita una approssimazione per eccesso sia sull'errore che sul valore della misura. Si può fare una eccezione a questa regola quando la prima cifra dell'errore assoluto è piccola, diciamo un 1 oppure un 2. In tal caso, per non compiere una approssimazione troppo grossolana (che sarebbe di circa il 40 % se dopo la cifra 1 ci fosse un 4) è consigliabile, ma non obbligatorio, tenere una cifra significativa in più sia dell'errore che della misura. In questo caso, ad esempio:

misura = 4,7282 *cm* ± 0,01335 *cm*

si potrebbe scrivere

misura = 4,728 *cm* ± 0,013 *cm*.

Concludendo, possiamo affermare che a meno di eccezioni vale la seguente **regola delle cifre significative**: *la scrittura delle cifre significative di una misura termina nella posizione decimale in cui si trova la prima cifra diversa da zero dell'errore assoluto.*

2.5. Gli errori casuali in misure ripetute

L'errore di sensibilità - Se di una grandezza fisica abbiamo a disposizione *una sola misurazione*, non abbiamo molte possibilità di scelta: l'errore assoluto da associare a tale valore deve necessariamente essere *l'errore dato dalla sensibilità dello strumento usato*.

Nel caso in cui sia possibile *ripetere più volte l'esperimento* abbiamo visto che può accadere di ottenere misure tutte leggermente diverse tra loro a causa della presenza degli errori casuali. Si può allora dimostrare matematicamente che la "miglior stima" della grandezza studiata è semplicemente fornita dal *valore medio* delle misure ottenute, e che tale valore è tanto più attendibile quanto più è elevato il numero di misure effettuate. Rimane da capire, però, quale deve essere l'errore che accompagna il valore medio in questo caso.

La semidispersione (o **semidifferenza**) - Supponiamo di ripetere una misura più volte mettendoci nelle stesse condizioni ambientali ed usando lo stesso strumento dall'elevata sensibilità. I valori che si ottengono siano i seguenti:

0,111 m   0,112 m   0,108 m   0,108 m   0,116 m   0,109 m   0,113 m.

Definiamo **semidifferenza o semidispersione SD** di una serie di misure il valore

SD = (Max − min) : 2

Nel nostro caso abbiamo:

SD = (0,116 *m* − 0,108 *m*) : 2 = 0,004 *m*

Se la misura che abbiamo eseguito è stata ripetuta un numero non elevato di volte, la semidispersione rappresenta l'errore assoluto, di origine casuale, da associare al valore medio M = 0,111 *m*. Nel nostro caso possiamo allora scrivere:

M = 0,111 *m* ± 0,004 *m*

Vediamo ora di sottolineare qual è il significato fisico della semidifferenza. *Essa rappresenta un indice di precisione della serie di misure, ed esprime di quanto l'insieme dei valori ottenuti sia sparpagliato attorno al valore medio per l'incidenza degli errori casuali* (e non è quindi da confondere con *l'accuratezza* della stessa serie di misure, che è invece in relazione con gli errori sistematici).

La deviazione standard σ - Se i dati a nostra disposizione sono molti e tutti ottenuti dalla *ripetizione della stessa misura nelle identiche condizioni sperimentali*, il concetto di semidispersione è statisticamente troppo debole per assolvere il compito di rappresentare correttamente l'errore assoluto da associare al valor medio x_m di una serie di valori $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$. A tal fine bisogna introdurre la **deviazione standard σ,** definita come *la radice quadrata della media del quadrato degli scarti tra le singole misure e il valore medio*. In formule:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - x_m)^2}{N}}$$

Poiché la definizione è apparentemente complessa,è meglio analizzarla passo per passo con un esempio specifico. Siano date, ad esempio, le seguenti cinque misure, di cui x_i è la generica misura *i-esima,* con l'indice *i* che può assumere un valore qualsiasi tra 1 e 5:

$x_1 = 22 \qquad x_2 = 24 \qquad x_3 = 18 \qquad x_4 = 19 \qquad x_5 = 27$

Il valore medio, facilmente calcolabile, è: $x_m = 22$.

Organizziamo ora una tabella dove si metta nella prima colonna la serie delle misure, nella seconda colonna gli scarti rispetto al valore medio e nella terza colonna il quadrato dei singoli scarti. Nella quarta colonna si esegua la media di tali scarti e infine, nella quinta colonna, la radice quadrata di questo valore che corrisponde alla *deviazione standard* cercata.

x_i	$(x_i - x_m)$	$(x_i - x_m)^2$	$\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - x_m)^2}{N}$	$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - x_m)^2}{N}}$
22	0	0	10,8	3,286
24	2	2		
18	-4	16		
19	-3	9		
27	5	25		

Tab. 1 – *Calcolo della deviazione standard*

La procedura di calcolo può essere automatizza e velocizzata utilizzando una comune calcolatrice scientifica oppure un foglio elettronico come *Microsoft Excel*. In questo ultimo caso, ad esempio, una volta riportate le cinque misure da analizzare nelle celle A1, A2. . . A5, basta scrivere in un'altra cella a scelta l'espressione

= DEV.ST.POP(A1: A5)

e automaticamente, una volta confermata la procedura con il tasto RETURN, comparirà il valore cercato.

Se le misure da analizzare sono molte, ci sono delle profonde giustificazioni teoriche per preferire la *deviazione standard* alla *semidispersione* perché la prima é un migliore indicatore dell'errore assoluto: tali motivazioni saranno trattate in un prossimo capitolo.

2.6. La legge di propagazione degli errori

Veniamo ora al problema di assegnare l'errore corrispondente ad una misura di tipo indiretto, cioè ottenuta tramite un calcolo algebrico, sapendo che ogni dato di partenza è accompagnato da un errore assoluto diverso. Proponiamoci di voler calcolare il perimetro e l'area di un rettangolo i cui lati *b* e *h* siano, rispettivamente:

$b = 12{,}6\ cm \pm 0{,}4\ cm \qquad\qquad h = 25{,}84\ cm \pm 0{,}05\ cm$

Un rapido conto porta ai risultati:

perimetro = 76, 88 *cm* ± ε_{ass} *Area* = 325, 584 cm^2 ± ε_{ass}

Come calcolare il valore assoluto associato all'area e al perimetro e con quante cifre significative si devono esprimere i due risultati?? La risposta si basa sulla **legge di propagazione degli errori** che consta di tre semplici regole (che non dimostriamo):

1) in una somma o una differenza di misure, l'errore totale associato al risultato è dato dalla somma dei singoli errori assoluti

2) in un prodotto o in un rapporto di misure, l'errore totale associato al risultato è la somma dei singoli errori percentuali

3) in una potenza o in una estrazione di radice di una misura, l'errore totale associato al risultato è dato dall'errore percentuale sulla base, moltiplicato per l'esponente (o per l'indice di radice).

Applichiamo quanto detto al caso in questione. Poiché il perimetro è la somma dei quattro lati del triangolo, l'errore assoluto sul totale sarà semplicemente dato dalla somma degli errori assoluti dei quattro lati:

perimetro = 76, 88 *cm* ± (0,4 + 0,4 + 0,05 + 0,05) *cm*

perimetro = 76,88 *cm* ± 0,9 *cm*

perimetro = 76,9 *cm* ± 0,9 *cm* (scritto con la corretta approssimazione).

Per quanto riguarda l'area, il procedimento è un po' più complicato. Poiché il risultato è ottenuto con una moltiplicazione, dovremo per prima cosa calcolarci gli errori percentuali su ogni misura di partenza e poi sommare questi errori per ottenere l'errore percentuale totale. Quindi:

$$\varepsilon_{\%b} = \frac{0,4}{12,6} \times 100 = 3,17\,\%$$

$$\varepsilon_{\%h} = \frac{0,05}{25,84} \times 100 = 0,19\ \%$$

$$\varepsilon_{\%TOT} = 3,17\,\% + 0,19\,\% = 3,36\ \%$$

$$Area = 325,584\ cm^2 \pm 3,36\ \%$$

A questo punto dobbiamo trasformare l'errore percentuale in errore assoluto per poter eseguire correttamente le approssimazioni sul risultato. Si ottiene:

$$\varepsilon_{ass} = \frac{\varepsilon_{\%}}{100} \times misura = 10,6140384\ cm^2$$

$$Area = 326\,cm^2\ \pm 11 cm^2 \qquad (approssimando\ correttamente\ il\ risultato)$$

In questo caso, poiché la prima cifra dell'errore è piccola (un 1), abbiamo tenuto anche la seconda (lo 0, che arrotondato per eccesso dà 1). Si noti come il risultato, di per sé, potrebbe essere lasciato con l'errore percentuale, ma così facendo non sarebbe possibile eseguire le indispensabili approssimazioni sul totale.

2.7. Misure uguali: l'intervallo di confidenza

Se ogni misura di laboratorio è, per sua natura, sempre accompagnata da un errore sperimentale, come possiamo regolarci per sapere se due valori sono uguali? Facciamo l'esempio di oggetti apparentemente identici che siano stati pesati con lo stesso strumento e nelle stesse condizioni ambientali. Le misure delle loro masse sono le seguenti:

A = 250 g ± 6 g

B = 247 g ± 4 g

Come possiamo dimostrare che le masse sono identiche?

Per dare una risposta dobbiamo considerare il cosiddetto **intervallo di confidenza**, cioè *l'intervallo centrato sul valore medio e di raggio pari all'errore assoluto e in cui "si confida" in termini statistici che sia compreso anche il "valore vero" della grandezza fisica studiata.*

Nel caso di A tale intervallo parte da 244 g ed arriva fino a 256 g. Nel caso di B, invece, l'intervallo in cui "confidiamo" che sia compreso il valore vero della massa parte da 243 g e arriva fino a 251 g. Vale, allora, la seguente ragionevole regola: *due misure sperimentali possono essere ritenute uguali se i loro intervalli di confidenza si sovrappongono almeno in parte.*

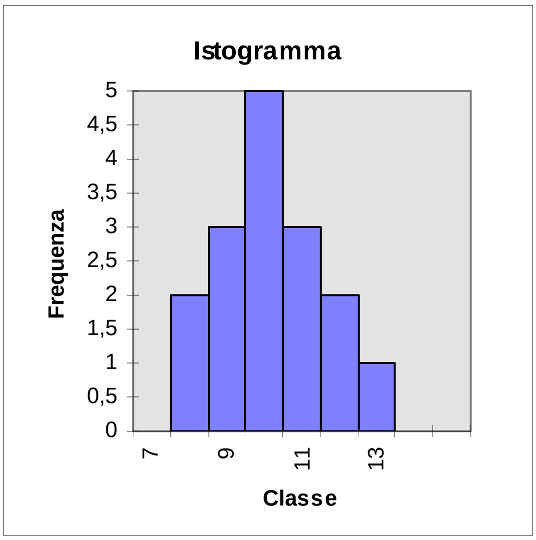
Nel nostro caso la sovrapposizione esiste: le due masse possono quindi essere considerate uguali.

Se si usa come errore assoluto il valore dato dalla deviazione standard σ, ci sono delle profonde motivazioni matematiche (che affronteremo nel prossimo capitolo parlando della Curva di Gauss) in base alle quali bisogna porre l'ampiezza dell'intervallo di confidenza pari a 2σ.

2.8. La curva di Gauss

Prendiamo dieci monete e per ognuna di esse individuiamo la faccia che presenta una "testa" e quella che riporta una "croce" (oppure due simboli analoghi). Mettiamo le monete in un bicchiere, agitiamole e riversiamole su un tavolo. Prendiamo nota di quante sono le monete che presentano il simbolo che abbiamo identificato con "testa". Ripetiamo la procedura un centinaio di volte, sempre prendendo nota del numero di monete che dopo il lancio presentano il simbolo "testa" e raccogliamo i risultati in una tabella come la seguente:

numero di "teste"	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
frequenza dell'evento	2	2	9	17	27	21	12	5	4	1



Se ora, a partire da questi dati, costruiamo il relativo *istogramma* (cioè il diagramma a barre che esprime quante volte una misura si è ripetuta), otteniamo il grafico in figura ??. Con questa procedura abbiamo simulato il processo di misura di una variabile che può assumere valori da 1 a 10 (il numero di teste) con valore medio pari a 5 (5 è il valore più probabile, quello per il quale le probabilità di ottenere testa o croce sono equivalenti).

Fig. 1 – *Istogramma delle frequenze*

La situazione descritta è perfettamente simile al caso in cui si considerino i valori assunti da una grandezza fisica misurata sperimentalmente. L'unica differenza è che nella realtà la variabile fisica può assumere un qualsiasi valore compreso tra 0 e 10 e non solo valori interi: quindi anche risultati pari a 1,77 oppure 8,7654 sono possibili. In tale situazione, se ripetiamo la misura un numero infinitamente grande di volte, le barre dell'istogramma tendono ad assottigliarsi perchè gli intervalli in cui raccogliere le misure diminuiscono di ampiezza e il grafico viene ad assumere l'aspetto di una curva continua dalla caratteristica forma a campana: **la curva di Gauss**. L'approssimazione è tanto migliore quanto più sono i punti utilizzati (al limite, in numero infinito…).

La curva così ottenuta, detta anche **gaussiana**, ha le seguenti importanti proprietà:

1) ogni punto della curva individua una singola misura e quante volte il suo valore si è ripetuto

2) il vertice rappresenta il valore che si è ottenuto più frequentemente: si può dimostrare matematicamente che tale valore coincide con il valore medio della serie delle misure

3) se gli errori sono solo di tipo casuale, e non sistematico, la *gaussiana* è simmetrica rispetto al vertice. Ciò significa che si ha la stessa probabilità di avere misure in eccesso che in difetto rispetto al *valore medio*

4) *la larghezza della gaussiana è un indice di precisione delle misure effettuate*, essendo in ovvia relazione con la dispersione casuale delle misure attorno al valore medio. Se abbiamo due serie di misure della stessa grandezza fisica, la serie a cui corrisponde una gaussiana più stretta è quella più precisa

5) si definisce punto di flesso di una curva, quel punto in cui essa cambia concavità. La gaussiana ha due flessi che sono situati poco oltre il punto di semialtezza. Si può dimostrare che la larghezza della curva di Gauss nel punto di flesso coincide con il doppio della *deviazione standard* σ

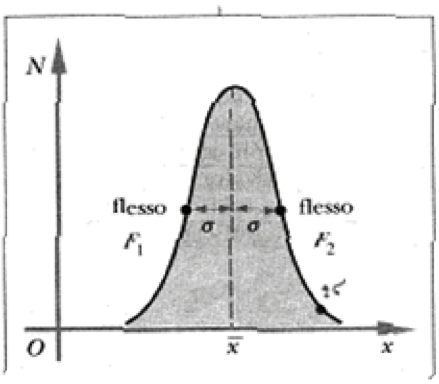
6) se il numero di misure è estremamente elevato (in teoria tendente all'infinito), si dimostra che:

.) il 50% delle misure è maggiore di x_m , il 50% minore

.) il 68,3% di esse cade nell'intervallo ($x_m \pm \sigma$)

.) il 95,5% di esse cade nell'intervallo ($x_m \pm 2\ \sigma$)

.) il 99,7% di esse cade nell'intervallo ($x_m \pm 3\ \sigma$)



E' importante non dimenticare *il significato esclusivamente statistico* di queste affermazioni: la concordanza tra teoria e pratica sarà perfetta solo nel caso di un numero infinito di misure, condizione impossibile da ottenere nella realtà.

Fig. 2 – *Curva di gauss e deviazione standard*

Possiamo però capire, adesso, perché la deviazione standard sia il miglior indicatore degli errori casuali: la giustificazione risiede nella curva di Gauss. *La deviazione standard ne rappresenta il parametro di larghezza, e quindi il miglior indice della dispersione delle misure ad opera degli errori casuali*.

Inoltre, un intervallo di confidenza ampio $\pm 2\sigma$ abbraccia di fatto quasi tutta la curva e ad esso corrisponde una probabilità del 95,5% di comprendere il valore "vero" della grandezza fisica studiata. Se invece dovesse capitare che anche costruendo intervalli di confidenza di ampiezza pari a tutta la gaussiana, cioe di larghezza $\pm 3\sigma$, questi NON dovessero sovrapporsi, allora vorrebbe dire che le due misure analizzate sono “quasi sicuramente diverse” . . .

Indice

Capitolo 2 .... - 1 -
Gli errori .... - 1 -

2.1. Errori casuali e sistematici .... - 1 -
2.2. Errori assoluti e percentuali .... - 3 -
2.3. Le cifre significative .... - 4 -
2.4. Le approssimazioni .... - 5 -
2.5. Gli errori casuali in misure ripetute .... - 6 -
2.6. La legge di propagazione degli errori .... - 7 -
2.7. Misure uguali: l’intervallo di confidenza .... - 8 -
2.8. La curva di Gauss .... - 9 -