Capitolo 4

Algebra vettoriale

4.1. Grandezze scalari

Si definiscono **scalari** quelle grandezze fisiche che sono descritte in modo completo da un *numero con la relativa unità di misura*.

La temperatura dell'aria in una stanza, la massa di un corpo, il numero di studenti in una classe, il numero delle pagine di un libro, la lunghezza di un segmento, l'area di una superficie sono quantità perfettamente note quando si conosca il valore numerico che le esprime (ad esempio: 30 °C, 200 kg, 22 cm, 100 m^2, 30 persone ...).

Le operazioni aritmetiche con le grandezze scalari seguono le normali regole dell'algebra. Per esempio, sommando le lunghezze di 10 cm e di 25 cm relative a due segmenti *adiacenti*, si ottiene come risultato un segmento lungo 35 cm; aggiungendo 50 m^2 ad un'area di 200 m^2 , la superficie complessiva diventa 250 m^2; aggiungendo 50 kg a un oggetto di massa 200 kg si ottiene una massa complessiva di 250 kg.

Gli scalari, quindi, sono quelle grandezze per cui si può dire che *due più due fa sempre quattro !!*

4.2. Grandezze vettoriali

Esistono invece alcune grandezze per le quali il discorso precedente non è più valido. Gli effetti di una forza, dell'accelerazione o della velocità, infatti, cambiano non solo in funzione del valore che ne esprime l'intensità (il modulo), ma anche in funzione della direzione di applicazione e del verso. Ad esempio, due treni che partono dalla stessa stazione alla velocità di 100 km/h lungo due differenti direzioni rettilinee, dopo lo stesso intervallo di tempo si ritroveranno in località completamente diverse tra loro, anche se all'identica distanza dal punto iniziale. Ciò vuol dire che per conoscere completamente gli effetti indotti da una grandezza fisica come la velocità, non basta conoscerne il *modulo*: occorre avere informazioni precise anche sulla sua *direzione* e sul suo *verso*.

Grandezze di questo tipo si chiamano **vettori**; le operazioni aritmetiche che le coinvolgono non seguono le tradizionali regole algebriche e necessitano di una nuova definizione (che vedremo nel prossimo paragrafo).

Ogni vettore **v** è rappresentato graficamente da un segmento orientato di lunghezza proporzionale al suo modulo, mentre quest'ultimo è indicato dal simbolo | **v** | oppure dalla lettera in corsivo " *v* ". Qualche volta si preferisce utilizzare una lettera soprassegnata da una freccia (o da un semplice trattino): $\vec{V}$. Una lettera scritta in grassetto distingue i vettori (**v**) dalle grandezze scalari (v).

Il punto iniziale del segmento che rappresenta un vettore si chiama **punto di applicazione ;** quello finale, individuato da una freccia, ne stabilisce il verso.

Due vettori si dicono **consecutivi** se il punto di applicazione del secondo coincide con l'estremo del primo.

Si dicono **opposti** se hanno lo stesso modulo e la stessa direzione, ma versi opposti : l'opposto di **v** è il vettore (-**v**). Due vettori **uguali,** invece, hanno lo stesso modulo, identica direzione e verso concorde.

Si chiama, infine, **versore** un vettore di modulo unitario (cioè tale che | **v** | = 1).

Vale la seguente **regola del trasporto:** *un vettore può esser traslato lungo una retta o lungo una qualunque direzione parallela a quella di partenza senza che questa operazione ne alteri il valore.*

4.3. Somma e differenza di vettori

Abbiamo già anticipato come, per eseguire le operazioni algebriche con i vettori, occorrano delle nuove procedure di calcolo. Vediamo il perché.

Se ci muoviamo a partire dall'origine O di un sistema di assi cartesiani eseguendo due spostamenti consecutivi di 2 *m* possiamo affermare di trovarci a una distanza di 4 *m* dal punto O al termine dell'operazione svolta ? Sicuramente no ! Ciò sarà vero solo se i due spostamenti avvengono nella stessa direzione e nello stesso verso. In tutti gli altri casi, la distanza tra il punto d'arrivo e quello di partenza sarà sempre *minore* di 4 *m*. Ad esempio, se il secondo spostamento é diretto perpendicolarmente al primo, applicando il teorema di Pitagora otteniamo che il punto finale dista da quello iniziale solo 2,8 *m*. Se invece il secondo spostamento fosse eseguito con modulo uguale al primo e verso opposto, ma sempre lungo la stessa direzione, ci ritroveremmo addirittura al punto di partenza con uno spostamento totale nullo.

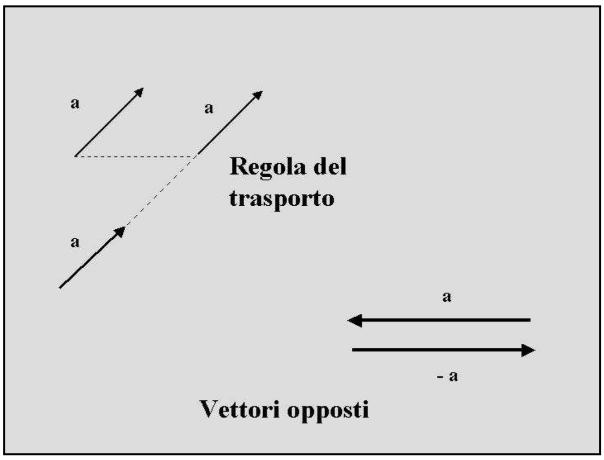


Fig. 1 – *Regola del trasporto e vettori opposti*

In definitiva, la somma di due vettori di modulo *2* potrebbe dare un vettore di modulo *4*, di modulo nullo (zero), oppure di modulo pari a un qualunque valore compreso tra *0* e *4*.

Possiamo così affermare che nel calcolo vettoriale quasi mai due più due fa 4 !! Tutto ciò ci costringe ad introdurre delle nuove procedure per le operazioni algebriche vettoriali.

Metodo punta-coda - *La somma di n vettori consecutivi si ottiene considerando il lato di chiusura della poligonale che ha come lati i vettori considerati*.

Se i vettori non sono consecutivi possiamo sempre ricondurci, con la *regola del trasporto*, al caso qui sopra considerato traslando i vettori in modo tale che ognuno inizi dove finisce il precedente. Anche due vettori che abbiano lo stesso punto di applicazione possono essere disposti in modo da usare il *metodo punta-coda*. Se poi i vettori sono *paralleli,* sarà sufficiente eseguire la somma dei moduli: direzione e verso rimarranno invariati. Il vettore somma si chiama **vettore risultante R**.

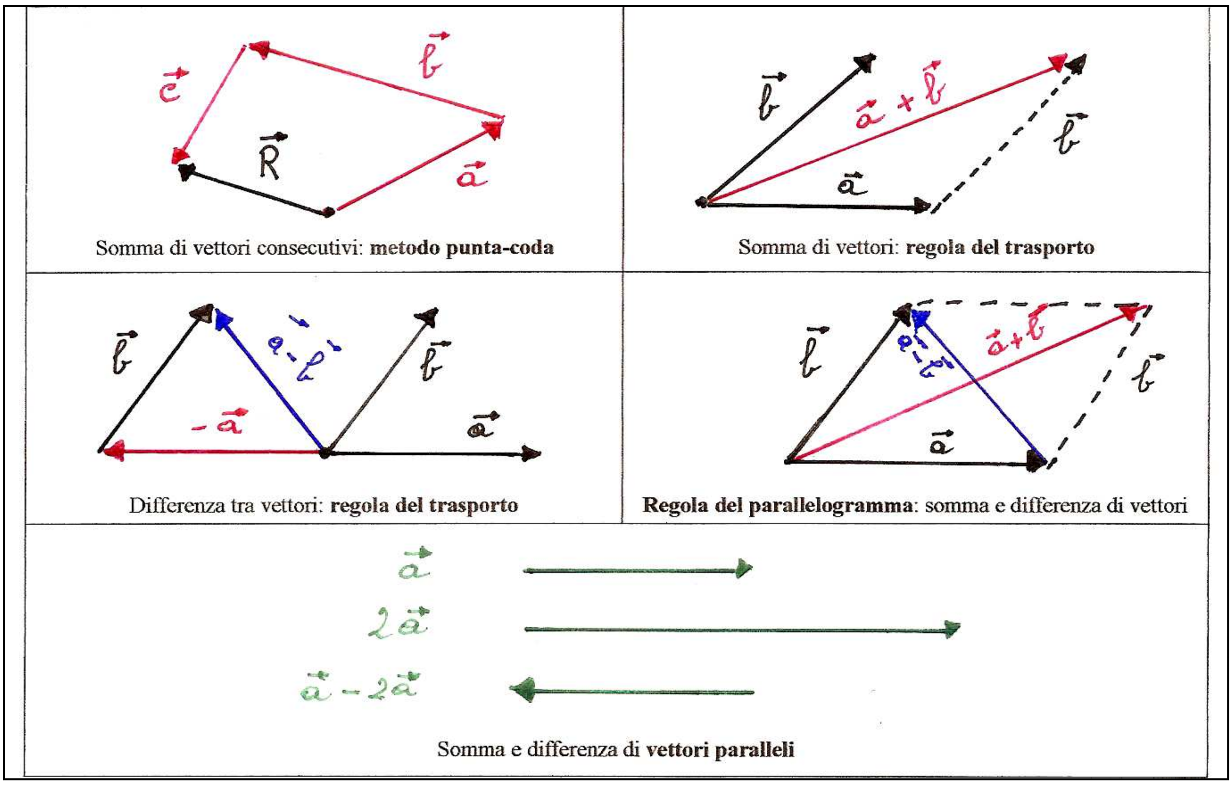
Differenza di vettori - Per eseguire la differenza occorre prima ricordare che, se **–a** é l'**opposto** di un vettore **a**, i due vettori hanno la stessa direzione, lo stesso modulo ma verso contrario. In tal modo possiamo calcolare la differenza tra due grandezze vettoriali riconducendoci alla somma tra il primo vettore e l'opposto del secondo e poi applicare il *metodo punta-coda*:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

Nel caso di vettori **paralleli** é sufficiente calcolare la differenza dei moduli: la direzione del vettore *risultante* rimane invariata, mentre il verso sarà determinato dal vettore di modulo maggiore.

La regola del parallelogramma - La regola del parallelogramma ci aiuta a sintetizzare questi metodi in un procedimento particolarmente semplice che permette di calcolare velocemente sia la somma che la differenza di due vettori generici **a** e **b** che abbiano lo stesso punto di applicazione.

Se infatti consideriamo il parallelogramma che ha come lati i due vettori studiati, possiamo notare come la diagonale uscente dal punto di applicazione comune coincida con la direzione e il verso del *vettore somma* **S** = **a** + **b**, mentre l'altra diagonale rappresenti il *vettore differenza* **D** = **a** − **b**, il cui verso é diretto dal secondo vettore **b** verso il primo vettore **a**.



Somma di vettori consecutivi: **metodo punta-coda**

Somma di vettori: **regola del trasporto**

Differenza tra vettori: **regola del trasporto**

Regola del parallelogramma: somma e differenza di vettori

Somma e differenza di **vettori paralleli**

Fig. 2 – *Somma e differenza di vettori*

La *regola del parallelogramma* ci aiuta così a rappresentare graficamente in modo molto semplice e intuitivo la direzione e il verso del vettore risultante. Per il calcolo numerico del modulo, invece, occorrono alcune considerazioni aggiuntive che saranno esposte nei prossimi paragrafi.

4.4. I triangoli notevoli

Si definiscono **notevoli** tutti quei *triangoli rettangoli* che hanno un angolo di 30° e l'altro di 60°, oppure due angoli di 45°.

Primo caso - Consideriamo il triangolo rettangolo ABC e supponiamo di conoscere uno dei suoi lati: ad esempio sia AC = L. Se ora duplichiamo tale triangolo e consideriamo il suo simmetrico rispetto al segmento BC, possiamo facilmente notare che il triangolo ACD é equilatero perché tutti i suoi angoli sono di 60° (vedi Fig. 3a). Quindi il lato AD = L. Ma il segmento AD é il doppio di AB per costruzione. Quindi AB = L/2. Possiamo ora applicare il teorema di Pitagora al triangolo di partenza ABC ed ottenere la lunghezza del terzo lato BC = L p3/2. Abbiamo così facilmente ricavato la lunghezza di tutti e tre i lati.

Riassumendo:

AC = L (noto in partenza)

AB = L/2 (perché il triangolo ACD é equilatero di lato L)

$BC = \sqrt{3}\ /\ 2$ (applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABC)

Secondo caso - Consideriamo ora un triangolo rettangolo con i due angoli acuti di 45°. Un tale triangolo ha i due cateti uguali, essendo isoscele su base AC. Duplicando ora la figura in modo simmetrico rispetto al lato AC, si ottiene un quadrato di lato AB = BC e di diagonale AC. Se suppongo di conoscere la lunghezza del lato AB = L, con il teorema di Pitagora posso ricavare il valore dell'ipotenusa AC (diagonale del quadrato ABCD). Per cui si ha:

AB = L (noto in partenza)

BC = L (perché il triangolo é isoscele)

AC = L√2 (dal teorema di Pitagora).

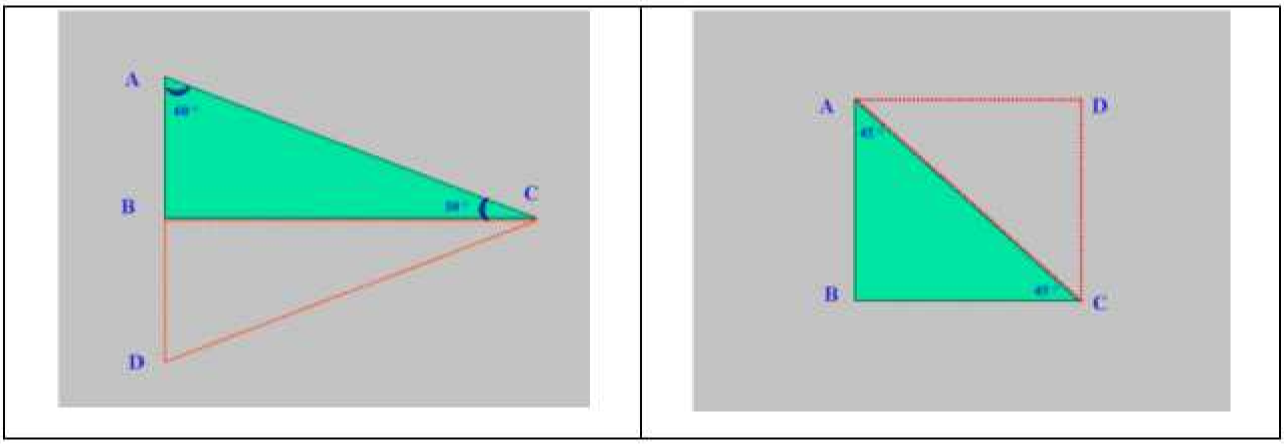


Fig. 3 – *Proprietà dei triangoli notevoli*

4.5. La scomposizione di un vettore

Scomposizione lungo due direzioni qualsiasi - Consideriamo due semirette uscenti da un punto O generico e un vettore **a** applicato in O. Se si tracciano dall'estremo di **a** le parallele alle direzioni considerate, queste individuano su tali semirette due segmenti a_1 e a_2 che si chiamano *le componenti* di **a** lungo le direzioni date. Se ora attribuiamo a questi due segmenti una direzione e un verso, trasformandoli nei vettori $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_2}$, é evidente per la regola del parallelogramma che vale la seguente relazione:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2}$$

Questo procedimento é detto *scomposizione*, e $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_2}$ sono detti i **vettori componenti** di **a**.

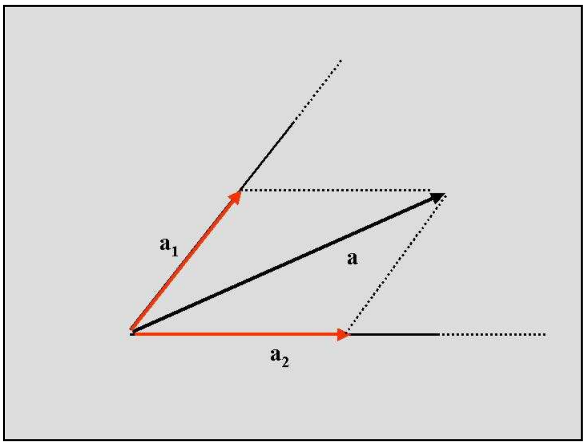


Fig. 4 – *Scomposizione di un vettore lungo due direzioni qualsiasi*

Scomposizione lungo due direzioni perpendicolari - Particolarmente importante é il caso in cui le due direzioni arbitrarie sono tra loro perpendicolari. Per comodità facciamo coincidere queste direzioni con gli assi cartesiani e consideriamo il punto di applicazione del vettore **a** come origine del sistema di riferimento. Le componenti $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_2}$ risultano allora essere l'ascissa e l'ordinata del punto che rappresenta l'estremo di **a**. Per ottenere una rappresentazione grafica é sufficiente tracciare da questo punto le parallele alle due direzioni considerate (gli assi cartesiani).

Anche in questo caso vale la regola del parallelogramma: ogni vettore, cioè, può essere rappresentato come somma vettoriale delle sue due componenti cartesiane.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} = \mathbf{a_x} + \mathbf{a_y}$$

Scomposizione lungo una direzione qualsiasi - Consideriamo, infine, un vettore **a** individuato in un piano cartesiano dal segmento orientato *OP* e una semiretta uscente dal punto di applicazione *O* e formante con il vettore dato un angolo α.

Scomporre **a** lungo tale direzione vuol dire tracciare dall'estremo *P* il segmento *PH* perpendicolare alla semiretta considerata.

Definiamo *componente parallela* di **a** il segmento

$$OH = a_{\parallel}$$

Definiamo, invece, *componente perpendicolare* di **a** il segmento:

$$PH = a_{\perp}$$

Si noti come tra le due componenti e il vettore di partenza continui a valere la regola del parallelogramma e come la relazione che lega le due componenti perpendicolari al modulo del vettore di partenza non sia altro che il Teorema di Pitagora.

Possiamo infatti scrivere:

$$a = \sqrt{a_{\|}^{2} + a^{2}_{\perp}}$$

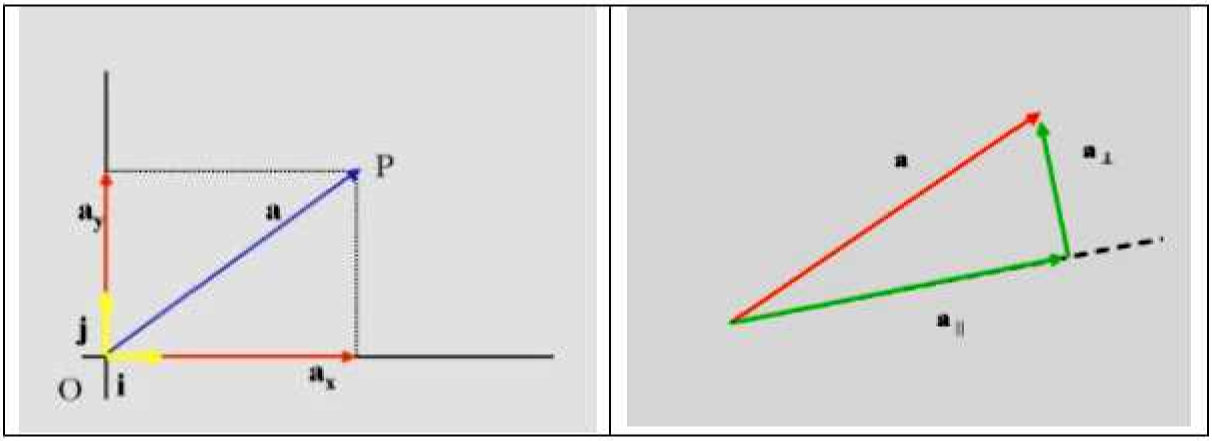


Fig. 5 - *Scomposizione di un vettore nelle sue due componenti lungo direzioni tra loro perpendicolari (a sinistra). Scomposizione di un vettore lungo una direzione qualunque (a destra).*

4.6. Rappresentazione cartesiana dei vettori

Il procedimento di scomposizione permette di calcolare il vettore somma **S** e il vettore differenza **D** di due vettori noti **a** e **b** in un modo estremamente rapido. Siano infatti:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_x} + \mathbf{a_y} \qquad\qquad \mathbf{b} = \mathbf{b_x} + \mathbf{b_y}$$

due vettori generici scritti come somma vettoriale delle due componenti cartesiane in *x* e *y* (oppure, in modo analogo, considerando la somma delle componenti parallele e perpendicolari).

E' immediato dimostrare per via grafica che il vettore somma **S** e il vettore differenza **D** sono esprimibili attraverso la somma o la differenza algebrica delle singole componenti di **a** e **b**:

$$\mathbf{S_x} = \mathbf{a_x} + \mathbf{b_x} \qquad \mathbf{S_y} = \mathbf{a_y} + \mathbf{b_y}$$

$$\mathbf{D_x} = \mathbf{a_x} - \mathbf{b_x} \qquad \mathbf{D_y} = \mathbf{a_y} - \mathbf{b_y}$$

Una volta che siano note le componenti cartesiane, é immediato costruire per via grafica **S** e **D** utilizzando la *regola del parallelogramma*. Ed é ugualmente facile calcolarne numericamente il modulo con il *teorema di Pitagora*, come di seguito suggerito:

$$S = \sqrt{S_x^{\,2} + S_y^{\,2}} \qquad D = \sqrt{D_x^{\,2} + D_y^{\,2}}$$

Per il calcolo del valore numerico delle componenti cartesiane può essere utile ricordarsi delle proprietà geometriche dei *triangoli notevoli* introdotte in precedenza.

Purtroppo tale metodo funziona solo se gli angoli utilizzati nella scomposizione dei vettori sono di 30°, 45°, e 60°.

Nel caso più generale si deve far ricorso alle funzioni trigonometriche e ai cosiddetti *teoremi di risoluzione dei triangoli rettangoli*, che affermano una serie di semplici proprietà che sono riportate di seguito:

1. *In un triangolo rettangolo, un cateto é sempre uguale al prodotto tra l'ipotenusa e il seno dell'angolo opposto*

$$a_x = a \times \cos \alpha$$

2. *In un triangolo rettangolo, un cateto é sempre uguale al prodotto tra l'ipotenusa e il coseno dell'angolo adiacente*

$$a_y = a \times sen\ \alpha$$

3. *In un triangolo rettangolo, un cateto é sempre uguale al prodotto tra l'altro cateto e la tangente dell'angolo opposto*

$$a_x = a \times \tan \alpha$$

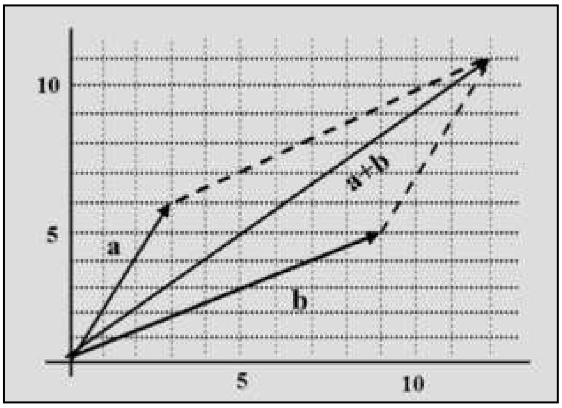


Fig. 6 - *Somma di vettori in rappresentazione cartesiana. Interpretazione geometrica: le componenti del vettore risultante si ottengono sommando le singole componenti dei vettori addendi.*

Grazie ai teoremi di risoluzione, se sono noti il modulo del vettore e una sua componente cartesiana, diciamo per esempio a e a_x, utilizzando le funzioni trigonometriche inverse (operazioni, queste, facilmente eseguibili da una qualunque calcolatrice scientifica mediante i tasti $\cos()^{-1}$, $\text{sen}()^{-1}$, $\tan()^{-1}$) *si può ottenere il valore dell'angolo* α *che individua la direzione del vettore nel piano cartesiano.* In formule:

$$a_x = a \times \cos \alpha \qquad \cos \alpha = \frac{a_x}{a} \qquad \alpha = ar\cos(\frac{a_x}{a})$$

$$a_y = a \times \sin \alpha \qquad \sin \alpha = \frac{a_y}{a} \qquad \alpha = ar\sin(\frac{a_y}{a})$$

$$a_y = a_x \times \tan \alpha \qquad \tan \alpha = \frac{a_y}{a_x} \qquad \alpha = ar\tan(\frac{a_y}{a_x})$$

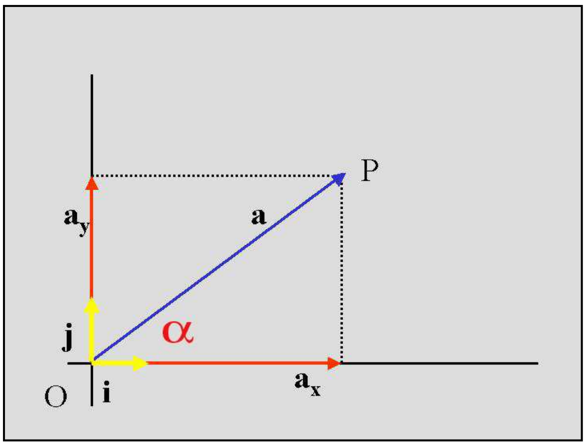


Fig. 7 – *Teoremi di risoluzione dei triangoli rettangoli*

4.7. Prodotto scalare

Dati due vettori **a** e **b**, sia α l'angolo tra essi compreso. Si definisce *prodotto scalare* il numero dato dal prodotto tra i loro moduli e il coseno dell'angolo compreso. In formule:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a \times b \times \cos(\alpha)$$

Si osservi che:

1) il risultato é uno scalare (cioé un numero)

2) il prodotto scalare di due vettori perpendicolari é nullo ($\cos 90° = 0$)

3) il prodotto scalare di due vettori paralleli é dato dal prodotto ordinario dei loro moduli $a \times b$ ($\cos 0° = 1$).

4.8. Prodotto vettoriale

Dati due vettori **a** e **b**, sia α l'angolo tra essi compreso. Si definisce *prodotto vettoriale* un vettore $\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ tale che:

1) il modulo di **c** é dato dall'espressione

$$c = a \times b \times \sin(\alpha)$$

2) la direzione di **c** é perpendicolare al piano che contiene **a** e **b**

3) il verso di **c** é dato dalla *regola della mano destra*: ovvero, orientando **a** come il pollice e **b** come l'indice, il dito medio dà la direzione e il verso del vettore **c.**

Si osservi come, a differenza del prodotto scalare, in questo caso *il risultato sia un vettore*.

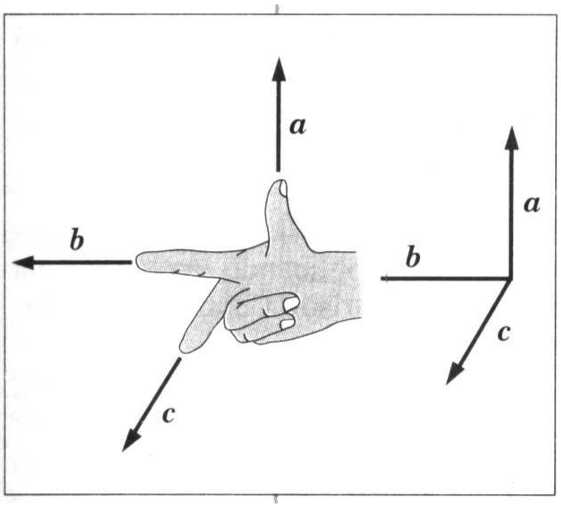


Fig. 8 – *Regola della mano destra*

Indice