Capitolo 5

La cinematica dei moti rettilinei

5.1. La meccanica

Lo studio del movimento ha inizio con gli antichi Greci e da allora ha sempre costituito uno degli argomenti principali dell'indagine fisica e filosofica della natura. Già nell'opera di *Aristotele* (384–322 a.C.) troviamo sintetizzate e rielaborate le riflessioni dei primi filosofi che si occupano del moto dei corpi, ma è soltanto con la figura di *Galileo Galilei* (1564–1642 d.C.) che questi studi si arricchiscono di un nuovo e potente mezzo d'indagine: il *metodo sperimentale*.

La **meccanica**, globalmente intesa come studio del movimento dei corpi e delle condizioni per le quali essi sono in quiete, è storicamente il primo vasto argomento ad essere affrontato secondo i paradigmi della nuova fisica. E' lo stesso Galileo, seguito qualche decennio dopo da *Isaac Newton* (1642-1727) che ne completerà l'opera, a gettarne le basi teoriche e matematiche. La meccanica può essere suddivisa in tre parti in funzione del particolare aspetto del problema analizzato: la cinematica, la dinamica e la statica.

La **cinematica** si occupa del movimento a prescindere dalle sue cause. Oggetti di studio sono lo *spazio percorso,* la *traiettoria*, la *velocità* e *l'accelerazione* del corpo in moto. Con essi si opera una classificazione dei vari tipi di moto possibili: rettilinei, circolari, uniformi, uniformemente accelerati ...

La **dinamica** sposta invece l'attenzione verso le cause che determinano il movimento: in tale contesto diventano fondamentali i concetti di *forza* e di *massa* e in funzione di questi si cerca di studiare il tipo di moto una volta che ne siano noti i valori.

La **statica** ha come obiettivo lo studio delle condizioni di equilibrio di un corpo. E' la situazione in cui il moto è assente, situazione che può verificarsi anche quando sul corpo agiscono contemporaneamente più forze. In tale contesto si introduce il concetto di *momento* di una forza rispetto a un punto.

5.2. Introduzione allo studio del moto

Nell'affrontare lo studio del moto risultano di importanza fondamentale i seguenti concetti:

1) le dimensioni dell'oggetto che si sta studiando vanno considerate **puntiformi**. In tal senso, una macchina in movimento sulla strada, un aereo in volo, un satellite in orbita attorno alla Terra, la stessa Terra nel suo moto attorno al Sole devono essere pensati come *punti materiali***,** cioè privi di dimensione e di estensione propria. Il guadagno di una tale approssimazione é in una maggiore semplicità nella trattazione matematica del moto.

2) La seconda questione riguarda la necessità di introdurre un **sistema di riferimento** rispetto al quale definire, istante dopo istante, la posizione dell'oggetto in moto.

Viene da se che una tale questione risulta essere alquanto delicata perché l'esperienza dimostra che il *concetto di moto ha un evidente valore relativo e non assoluto*. Una persona su un veicolo in corsa, ad esempio, può essere considerata ferma rispetto al veicolo stesso, ma è in moto rispetto ad un osservatore a terra; un osservatore fermo sulla Terra è invece in moto non solo rispetto a un veicolo in corsa, ma anche rispetto al Sole. Due treni che corrono paralleli nello stesso verso e con la stessa velocità possono essere considerati fermi l'uno rispetto all'altro, ma sono ovviamente in moto rispetto ai binari, e così via.
Per esprimere il movimento di un generico punto P nello spazio, diventa allora essenziale specificare il sistema di riferimento a cui ci si riferisce: ad esso si fa corrispondere una terna di assi cartesiani x, y, z e di origine O che risulta indispensabile per esprimere la posizione di ogni oggetto studiato.

3) Sia P un corpo in moto in un dato sistema di riferimento. Definiamo **vettore posizione** un vettore **s** applicato nell'origine O degli assi cartesiani e con l'estremo nel punto P. Il modulo di **s** esprime, istante dopo istante, la distanza dall'origine degli assi cartesiani dell'oggetto in movimento e, in definitiva, la posizione assunta da P nel tempo.

Possiamo così dare la seguente definizione di **moto**: *un oggetto è in moto se il suo vettore posizione* **s** *varia nel tempo rispetto al sistema di riferimento prescelto.*

4) Si definisce **legge oraria** (o **legge del moto**) *una relazione in grado di fornire ad ogni istante t la posizione* **s** *assunta da un corpo in moto.*

Semplici esempi di leggi orarie che si incontrano frequentemente nella vita di ogni giorno sono le tabelle degli orari di treni e dei pullman. In questi casi la relazione ha spesso la forma di una rappresentazione tabulare delle variabili *spazio* e *tempo*.
Nella maggior parte dei casi che incontreremo, però, tale relazione sarà espressa nella forma di una equazione matematica, con le variabili *spazio* e *tempo* come incognite. Quelli che seguono sono esempi elementari di leggi del moto: il tempo è in genere indicato con la lettera *t*, mentre lo spazio può essere di volta in volta rappresentato dalle incognite s, x, y, z …

$$s = 4\,t - 2$$

$$x = 6\,t^2 + 2\,t - 3$$

$$y = 5t$$

$$z = t^4 + 5t^3 - t^2 + 3t - 7$$

5) Si chiama **grafico orario** *la curva che in un sistema di riferimento cartesiano rappresenta la dipendenza dello spazio* S *dal tempo* t *così come espressa dalla legge oraria del moto.*

Un grafico orario viene sempre costruito con la variabile tempo *t* sull'asse delle ascisse, e la variabile spazio *S* sull'asse delle ordinate.

6) Si definisce **traiettoria** *la curva continua che unisce tutte le posizioni successivamente occupate nello spazio da un corpo in movimento, e che rappresenta il percorso "visibile" effettivamente compiuto dall'oggetto considerato*.

Anche la traiettoria può essere espressa da una relazione matematica, ma attraverso una equazione che contiene solo le coordinate spaziali x, y, z e non il tempo *t*. Questa caratteristica distingue l'equazione di una traiettoria da quella della legge oraria del moto. Esempi di traiettorie sono le seguenti equazioni:

$y = x$	retta
$y = 2x^2 + 5x - 1$	parabola
$x^2 + y^2 = 1$	circonferenza

I due concetti non vanno quindi confusi. E'sicuramente vero, ad esempio, che a una data traiettoria possono corrispondere molte leggi orarie diverse (cioè, uno stesso tragitto può essere percorso in molti modi diversi, a velocità differenti, con o senza soste, con variazioni di velocità più o meno elevate …). In modo analogo, una stessa legge oraria può rappresentare traiettorie completamente diverse tra loro (ad esempio, posso muovermi su un tragitto rettilineo con velocità costante sia in direzione Nord che verso Sud: la legge del moto è la stessa, le traiettorie hanno invece verso opposto).

5.3. Lo spazio

In cinematica si parla frequentemente di *spazio percorso* ΔS e di *spostamento* $\Delta \mathbf{S}$. I due concetti non coincidono: lo **spazio percorso** é una grandezza *scalare* ed identifica la lunghezza misurata sulla traiettoria del cammino effettivamente compiuto da un oggetto in moto.

Lo **spostamento** é invece un *vettore* che individua la distanza, la direzione e il verso del segmento che separa il punto di partenza A da quello di arrivo B.

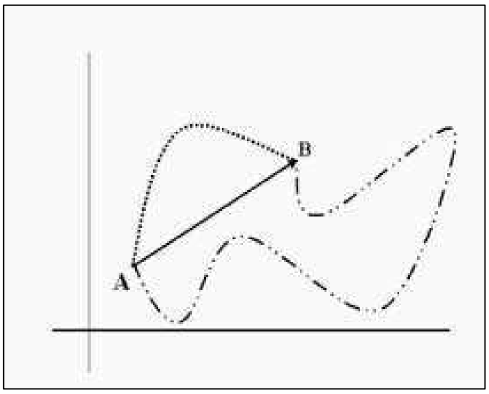

Fig. 1 - *Lo spazio percorso* ΔS *è dato dalla lunghezza del cammino da A a B misurato sulla traiettoria. Il vettore spostamento* $\Delta \mathbf{S}$ *è invece rappresentato dal segmento orientato che unisce direttamente i due punti. Lo spazio percorso è sempre maggiore del modulo del vettore spostamento; le due quantità risultano uguali solo nel caso in cui il tragitto da A a B risulti rettilineo e non vi siano inversioni di moto. Si noti come, ad un unico vettore spostamento possono corrispondere spazi percorsi molto diversi tra loro: in figura ne sono rappresentati due.*

Anche i due valori numerici, riferiti allo stesso percorso, sono in genere diversi tra loro e *coincidono solo se la traiettoria del corpo in moto é rettilinea e se non c'é inversione di moto*; in caso contrario, lo spazio percorso Δ S è sempre maggiore del modulo del vettore spostamento Δ **S**. In un percorso chiuso, ad esempio, dove il punto di partenza A e quello d'arrivo B coincidono, il modulo dello spostamento Δ **S** è sempre nullo, mentre lo spazio percorso Δ *S*, coincidendo con la lunghezza del tragitto realmente compiuto, può avere un valore anche estremamente elevato.

5.4. La velocità

Velocità media scalare - Se ci troviamo su di un'auto e diciamo di muoverci a 50 km/h, il significato di questa affermazione non dovrebbe lasciare dubbi: vogliamo dire cioè che, se la velocità rimane costante, percorreremo 50 km in un'ora, 100 km in due ore, 25 km in mezz'ora . . . Se invece la velocità dovesse cambiare nel tempo e scoprissimo che dopo un'ora abbiamo comunque coperto un tragitto di 50 km, potremo solo affermare che la nostra **velocità media** é di 50 km/h.

Da ciò segue la seguente definizione:

$$\mathrm{v}_{\mathrm{media}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{spazio\ percorso}{tempo} = \frac{s_{finale} - s_{iniziale}}{t_{finale} - t_{iniziale}}$$

Le unità di misura nel S.I. sono *m/s* (metri al secondo).

Nel uso quotidiano è abbastanza frequente misurare la velocità in *km/h*. Il passaggio da una scrittura all'altra si ottiene tramite la seguente ovvia equivalenza metrica:

$$1\,\frac{m}{s} = 1\frac{\frac{1}{1000}km}{\frac{1}{3600}h} = \frac{3600\ km}{1000\,h} = 3{,}6\,\frac{km}{h}$$

Per la trasformazione inversa dai *km/h* ai *m/s* basta invece dividere il modulo della velocità per lo stesso coefficiente 3,6.

Velocità media vettoriale – Nel discorso precedente c'è però una sostanziale omissione. La definizione di velocità non contiene alcun accenno alla direzione e al verso del moto.

Supponiamo, infatti, di essere nel centro di Milano e di muoverci per due ore alla velocità media (scalare) di 50 *km/h*. Al termine del nostro viaggio ci troveremo ad aver percorso 100 *km*, ma questa informazione non è sufficiente non solo per sapere dove siamo con esattezza, ma nemmeno per essere sicuri della distanza a cui ci troviamo rispetto al punto di partenza. Potremmo, infatti, aver percorso una traiettoria molto tortuosa che non ci ha permesso di allontanarci di molto; oppure potremmo aver seguito un percorso chiuso per ritrovarci, dopo due ore, di nuovo al punto da cui siamo partiti. Una definizione di velocità non può quindi prescindere dalla conoscenza della direzione e del verso che caratterizza il moto istante dopo istante. Diamo quindi la definizione di velocità media vettoriale:

$$\mathbf{v}_{\text{media vettoriale}} = \frac{vettore\ spostamento}{tempo} = \frac{\Delta \mathrm{s}}{\Delta t}$$

I moduli delle velocità medie scalari e vettoriale sono in genere diversi tra loro. *Coincidono però nel caso in cui la traiettoria sia rettilinea e non vi siano inversioni di moto.*

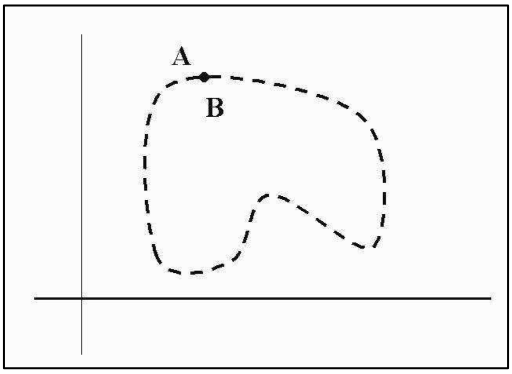

Fig. 2 - *In una traiettoria chiusa dove il punto di partenza **A** e quello finale **B** coincidono, lo spazio percorso* Δs *é dato dalla lunghezza del perimetro: il vettore spostamento* $\Delta\mathbf{s}$ *é invece nullo.*

Velocità istantanea – Riconsideriamo l'esempio precedente (una macchina in partenza dal centro di Milano copre in un ora un tragitto di 50 km) perché c'è ancora un aspetto importante che ci sta sfuggendo: *se il moto non è avvenuto a velocità costante,* come è molto probabile nella realtà di ogni giorno, conoscere la velocità media non ci aiuta ad ottenere il valore della velocità <u>in un istante qualsiasi</u>. Non possiamo infatti sapere se essa è cambiata (e come) istante dopo istante.

Questa nuova e più precisa esigenza può essere soddisfatta solo restringendo il calcolo ad intervalli di tempo molto piccoli: se, infatti, consideriamo il valore della velocità media vettoriale in intervalli di 1 minuto, di 1 secondo, di 1 decimo di secondo . . . e così via, prendendo intervalli temporali sempre minori al limite tendenti a zero, il modulo della velocità media calcolato di volta in volta sarà una approssimazione sempre più vicina al valore che cerchiamo: quello della *velocità istantanea*.

Supponiamo di voler conoscere la velocità nell'istante t = 60 s dalla partenza: il primo passo potrebbe essere quello di calcolare la velocità media del corpo in moto nell'intervallo di 10 secondi compreso tra t = 60 s e t = 70 s. Il valore che ottengo in questo caso é senz'altro una buona stima della velocità istantanea richiesta, ma sicuramente posso fare di meglio considerando l'intervallo di tempo tra 59 e 61 secondi. E se non dovessi essere ancora soddisfatto, potrei ricavare la velocità media tra 59,9 e 60,1 secondi, oppure tra 59,99 e 60,01, tra 59,999 e 60,001 secondi … e via di questo passo, considerando intervalli di tempo di volta in volta più piccoli che conducono ad approssimazioni sempre migliori del risultato.

La procedura sopra descritta è di tipo sperimentale. Nella risoluzione di problemi ed esercizi teorici il calcolo della velocità istantanea viene ottenuto in modo relativamente semplice con procedure di tipo algebrico che fanno riferimento alle diverse leggi orarie del moto.

5.5. L'accelerazione

La necessità di definire il concetto di *velocità istantanea* nasce dalla constatazione che, tranne alcuni casi specifici, durante il moto di un oggetto il vettore velocità non rimane costante nel tempo, e questo cambiamento può riguardare il modulo (una macchina che accelera o frena lungo una strada rettilinea), oppure anche solo la direzione o solo il verso del *vettore velocità:* è questo il caso in cui un'auto percorre alla velocità costante di 50 *km/h* una curva circolare: il modulo non varia, ma la direzione del vettore velocità cambia in ogni istante, pur mantenendosi sempre tangente alla traiettoria.

Per meglio studiare queste situazioni di moto si introduce il concetto di **accelerazione**, la cui definizione è la seguente:

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_{\text{finale}} - \mathbf{v}_{\text{iniziale}}}{\Delta t}$$

Le unità di misura nel S.I. sono m/s^2 (metri al secondo quadrato).

In conclusione: un moto è accelerato se la velocità di un oggetto cambia nel tempo, e questo cambiamento può riguardare il modulo (una macchina che accelera o frena lungo una strada rettilinea), oppure anche solo la direzione o solo il verso del **vettore velocità** (è il caso in cui un'auto percorre alla velocità costante di 50 *km/h* una curva circolare: il modulo non varia, ma la direzione del vettore velocità cambia in ogni istante, mantenendosi sempre tangente alla traiettoria).

5.6. Una questione di segno

Nell'affrontare la risoluzione di un problema di cinematica *la scelta del verso positivo della direzione di moto è totalmente arbitraria.* Una volta presa una certa decisione, però, il segno della velocità rimane automaticamente fissato: segno positivo, se il corpo si muove lungo la direzione positiva (perché $s_{finale} > s_{iniziale}$, quindi sia Δs che Δv risultano positivi); segno negativo se il corpo si muove in direzione contraria (perché $s_{finale} > s_{iniziale}$, quindi sia Δs che Δv risultano essere negativi).

Se ora si considera il segno dell'accelerazione, si possono presentare quattro casi distinti:

1. *velocità positiva – accelerazione positiva*

L'oggetto si muove lungo la direzione positiva e sta "accelerando" perché il modulo della velocità aumenta: $v_{finale} > v_{iniziale}$

2. *velocità positiva – accelerazione negativa*

L'oggetto si muove lungo la direzione positiva e sta "frenando", perché il modulo della velocità diminuisce: $v_{finale} < v_{iniziale}$

3. *velocità negativa – accelerazione negativa*

L'oggetto si muove lungo la direzione negativa e sta "accelerando" perché il modulo della velocità aumenta: $v_{finale} > v_{iniziale}$

4. *velocità negativa – accelerazione positiva*

L'oggetto si muove lungo la direzione negativa e sta "frenando" perché il modulo della velocità diminuisce: $v_{finale} < v_{iniziale}$.

Possiamo così riassumere: *se velocità ed accelerazione hanno segno algebrico concorde, il corpo sta "accelerando". Se il segno è opposto, invece, l'oggetto sta "decelerando".*

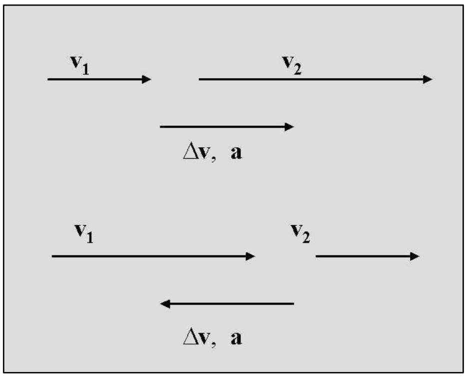

Fig. 3 - *In un moto rettilineo la direzione dei vettori* **Δs**, **v**, *e* **a** *è la stessa e coincide con la retta su cui avviene il moto. Anche il verso di* **v** *e* **Δs** *è concorde, per la definizione stessa di velocità. Il vettore accelerazione, invece, ha direzione e verso dati da* **Δv**: *si ha quindi una accelerazione che fa aumentare il modulo della velocità se* **Δv** *e* **v** *hanno lo stesso verso, si ha una diminuzione del modulo della velocità nel caso contrario (in figura le velocità sono tutte positive).*

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_{\text{finale}} - \mathbf{v}_{\text{iniziale}}}{\Delta t}$$

Le unità di misura nel S.I. sono m/s^2 (metri al secondo quadrato).

In conclusione: un moto è accelerato se la velocità di un oggetto cambia nel tempo, e questo cambiamento può riguardare il modulo (una macchina che accelera o frena lungo una strada rettilinea), oppure anche solo la direzione o solo il verso del **vettore velocità** (è il caso in cui un'auto percorre alla velocità costante di 50 *km/h* una curva circolare: il modulo non varia, ma la direzione del vettore velocità cambia in ogni istante, mantenendosi sempre tangente alla traiettoria).

5.7 Moto rettilineo uniforme (M.R.U.)

Si definisce **moto rettilineo uniforme** (M.R.U.) un moto *in cui la traiettoria è una retta e il modulo della velocità rimane costante nel tempo*. In tal caso:

1) per comodità possiamo prendere come direzione di moto uno degli assi cartesiani

2) il modulo della velocità media e della velocità istantanea coincidono in ogni momento

3) l'accelerazione è nulla.

Più in generale:

ogni tipo di moto in cui il modulo della velocità rimane costante si dice "uniforme".

Legge oraria – La deduzione algebrica della legge oraria di un moto rettilineo uniforme è facilmente ottenibile dalla definizione di velocità esplicitandone l'equazione rispetto allo spazio percorso S:

$$\mathrm{v}_{\text{media}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\textit{spazio percorso}}{\textit{tempo}} = \frac{s_{\textit{finale}} - s_{\textit{iniziale}}}{t_{\textit{finale}} - t_{\textit{iniziale}}}$$

$$s_{\textit{finale}} - s_{\textit{iniziale}} = \mathrm{v}_{\text{media}}\,(t_{\textit{finale}} - t_{\textit{iniziale}})$$

$$s_{\textit{finale}} = \mathrm{v}_{\text{media}}\,(t_{\textit{finale}} - t_{\textit{iniziale}}) + s_{\textit{iniziale}}$$

In genere si prende come istante d'inizio quello in cui il cronometro segna $t_{\textit{iniziale}} = 0$ e si preferisce identificare lo spazio finale con la sola lettera *s* (ad indicare che l'equazione è valida per una qualunque situazione *finale*, cioè qualunque sia lo spazio percorso ad un generico istante *t*). Ricordando poi che la velocità in ogni istante è uguale alla velocità media, essendo il moto uniforme, la *legge oraria del M.R.U.* diventa semplicemente:

$$\boxed{\mathrm{s} = \mathrm{v\,t} + \mathrm{s}_{\text{iniziale}}}$$

Se poi la posizione iniziale dell'oggetto studiato dovesse essere $s_i = 0$ (cioè il corpo parte dall'origine del sistema di riferimento prescelto), la legge oraria si semplifica ancora di più diventando:

$$\boxed{s = \mathrm{v}t}$$

Grafici orari – Diamo ora una rappresentazione grafica del moto ponendo la variabile tempo sull'asse delle ascisse e lo spazio sull'asse delle ordinate. La curva che si ottiene è quella di una retta che parte dal punto $y = s_i$ (dove s_i sta per $\mathrm{s}_{\text{iniziale}}$), oppure dall'origine degli assi se lo spazio iniziale è nullo, $s_i = 0$. In modo analogo, mettendo sull'asse delle ordinate il valore della velocità (costante) in funzione del tempo, si ottiene una retta orizzontale che rappresenta il grafico velocità tempo del M.R.U.

E' importante notare come l'analisi dei grafici orari ci permetta di ricavare alcune importanti informazioni sul moto senza usare direttamente la legge oraria):

- Il **coefficiente angolare** *m* della retta *spazio-tempo* fornisce il valore (costante) della velocità:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{velocità}$$

- L'**area** della figura delimitata dalla retta *velocità-tempo* e dall'asse delle ascisse rappresenta lo spazio percorso dall'oggetto in moto. In questo caso abbiamo a che fare con un rettangolo e si ha:

Area sottesa = altezza x *base = velocità* x *tempo = spazio percorso.*

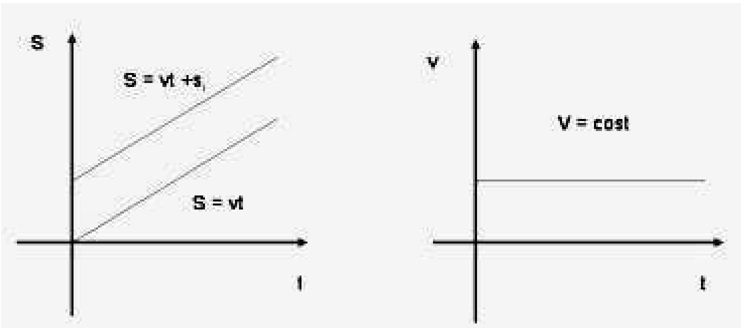

Fig. 4 – *Grafici orari spazio-tempo (a sinistra) e velocità-tempo (a destra) di un M.R.U.*

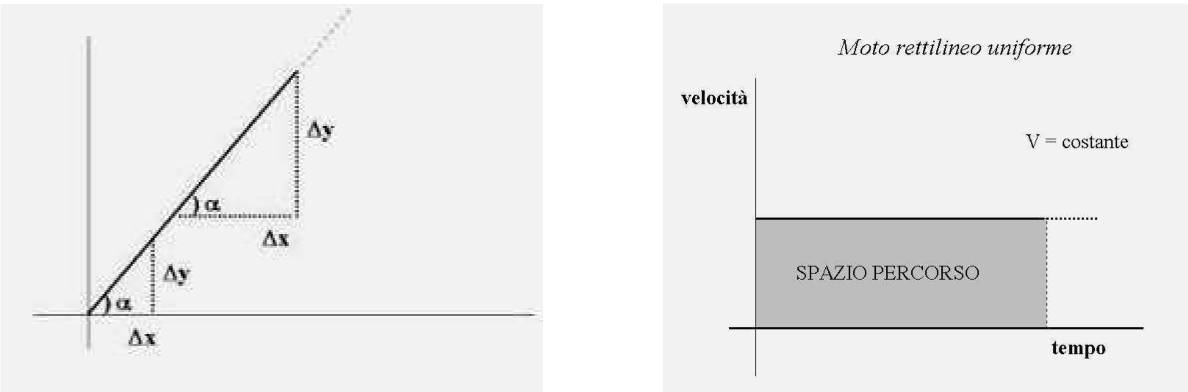

Fig. 5 – *In un grafico spazio-tempo (a sinistra) il coefficiente angolare della retta fornisce il valore della velocità. In un grafico velocità-tempo (a destra) l'area compresa tra la curva e l'asse delle ascisse dà il valore dello spazio percorso.*

Verifica sperimentale - Per studiare sperimentalmente il M.R.U. utilizziamo uno strumento detto *rotaia a cuscino d'aria*.

Si tratta di una sbarra metallica di sezione triangolare lunga circa 160 *cm* su cui si possono muovere delle slitte munite di una bandiera rigida di forma rettangolare. Un sistema di fotocellule (traguardi ottici) é disposto lungo il percorso: quando la slitta passa davanti a una fotocellula, la bandiera interrompe il raggio di luce che questa emette. Ciò consente di inviare un impulso elettrico ad un apposito cronometro collegato al sistema di rilevazione che lo tramuta in una misura di tempo. Posizionando i sensori ottici in punti diversi lungo la rotaia é così possibile ricavare i diversi istanti in cui avviene il transito della slitta e costruire una tabella “spazio percorso- tempo impiegato”.

Affinché il moto avvenga senza attrito, un compressore immette un forte flusso d’aria all’interno della rotaia. Un sistema di numerosi piccoli fori consente poi all’aria di uscire dalla superficie della sbarra e di sollevare di una frazione di millimetro la slitta durante il suo tragitto evitando così il contatto diretto tra le due superfici e la conseguente presenza di attrito che falserebbe il moto. Un martelletto elettromagnetico posto all’inizio del percorso ed azionato da un pulsante dà una spinta costante alla slitta e contemporaneamente mette in azione il cronometro.

Supponiamo ora di eseguire l’esperienza in laboratorio, di raccogliere i risultati in una tabella e di rappresentare i dati sperimentali sotto forma di un grafico *spazio-tempo* in un piano cartesiano.

Si può notare che i dati si dispongono su di una retta passante per l’origine, quindi la proporzionalità tra spazio S e tempo t é di tipo diretto. Il coefficiente angolare *m* della retta fornisce il valore (costante) della velocità v:

Nel caso in cui l’oggetto studiato all’istante t = 0 non si trovi nell’origine degli assi ma in posizione diversa $s = s_i$, bisognerà aggiungere questo valore iniziale a tutte le misure di posizione successive.
Il grafico orario assume così l’aspetto di una retta che parte da una intersezione non nulla s_i con l’asse delle ordinate (vedi figura 5).

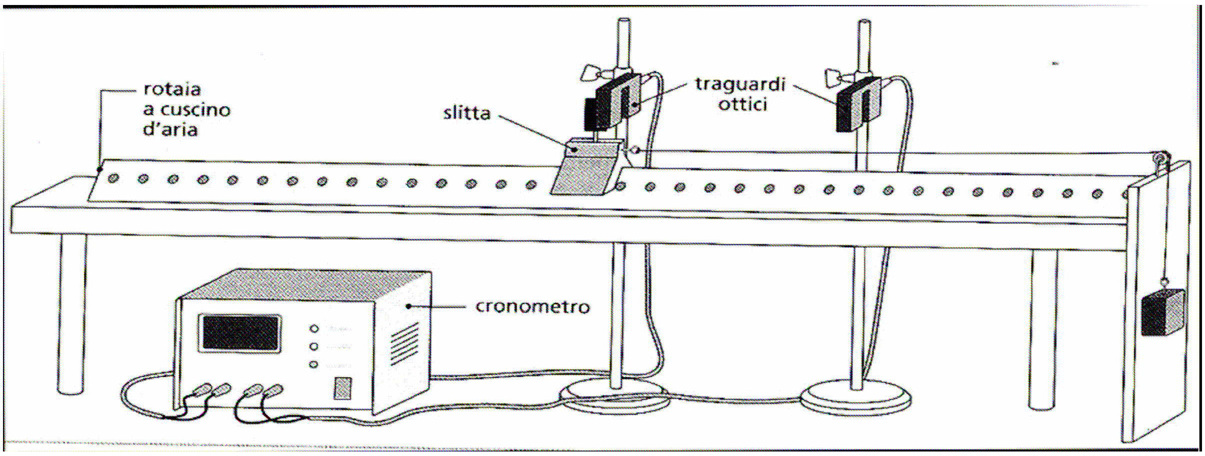

Fig. 6 – *Rotaia a cuscino d’aria*

Eseguiamo ora la seguente modifica all’esperimento. Con le fotocellule situate nelle identiche posizioni, impostiamo il cronometro in modo da registrare questa volta il cosiddetto *tempo di oscuramento* T_{osc}, cioè l’intervallo di tempo necessario alla bandiera rigida montata sulle slitte per passare davanti alla fotocellula e quindi per “oscurarla” temporaneamente. Misurata la larghezza L della bandiera, é immediato ricavare la velocità della slitta nelle posizioni prefissate: $V = L / T_{osc}$.

Il valore ottenuto è di fatto una velocità media, ma le piccoli dimensioni lineari della bandiera consentono di considerare tale valore come una <u>buona approssimazione della velocità istantanea</u> nel punto in cui è stato posizionato il traguardo ottico.

Raccogliendo i dati in una tabella *velocità-tempo*, si può costruire il relativo grafico orario ponendo in ascisse il tempo ed in ordinata il valore della velocità. Quello che si nota é che ora la retta risulta essere parallela all'asse delle ascisse dimostrando come il valore numerico della velocità rimanga costante nel tempo.

In un tale grafico lo spazio racchiuso tra la retta orizzontale della velocità e l'asse delle ascisse assume un significato estremamente importante. Questa area, essendo quella di un rettangolo, è facilmente calcolabile nel seguente modo:

Area sottesa = altezza x *base = velocità* x *tempo = spazio percorso*

Siamo così riusciti a dimostrare anche per via sperimentale le principali caratteristiche del moto rettilineo uniforme.

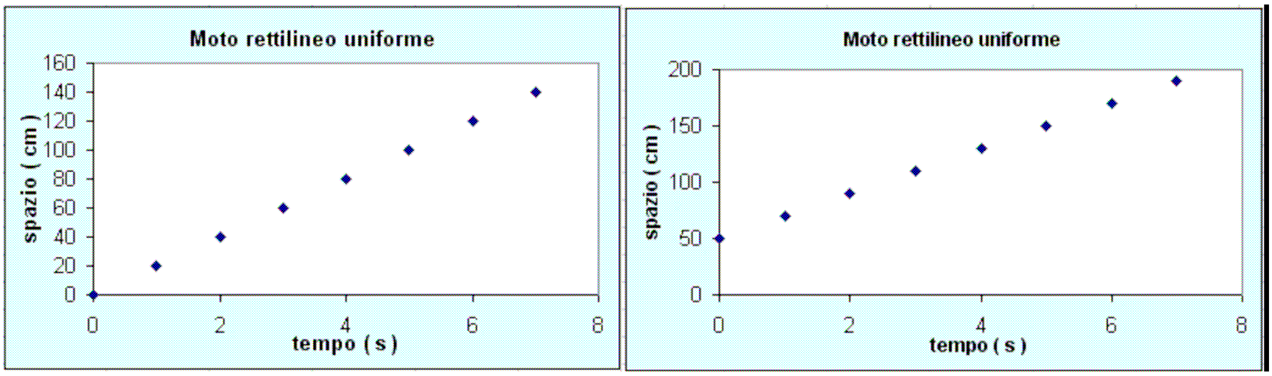

Fig. 7 - *Grafico orario del moto rettilineo uniforme con posizione iniziale nulla (a sinistra) e spazio iniziale* S_0 = 50 cm *(a destra).*

spazio (cm)	0	20	40	60	80	100	120	140
tempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7

Fig. 8 – *Dati relativi al moto rettilineo uniforme con velocità iniziale nulla.*

Nota bene - Si ricordi infine che la seguente espressione:

$$v_{media} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

definisce sempre e soltanto la velocità media, e non quella istantanea (che in genere cambia in continuazione), e che le due velocità coincidono solo nel moto rettilineo uniforme. Fu proprio questa ultima particolarità a suggerire a Galileo la seguente affermazione:

"In un moto rettilineo uniforme, spazi uguali sono sempre percorsi in tempi uguali".

5.8 Moto rettilineo uniformemente accelerato (M.R.U.A.)

Si definisce **moto rettilineo uniformemente accelerato** (M.R.U.A.) *un moto la cui traiettoria è rettilinea e la cui accelerazione è costante nel tempo.*

Legge oraria – Quando l'accelerazione è costante avviene che la variazione di velocità è la stessa in eguali intervalli di tempo. Consideriamo un corpo inizialmente fermo che inizia a muoversi con un valore di accelerazione

$a = 4\ m/s^2$

Ciò vuol dire che la sua velocità aumenta sempre di 4 m/s ogni secondo che passa; cioè, dopo un tempo di 1s, 2s, 3s, e 4s la velocità diventerà pari a 4m/s, 8m/s, 12m/s 16m/s ….In questo caso (accelerazione costante, quindi velocità che varia sempre delle stesse quantità ogni secondo che passa) e solo in questo caso, la velocità media del corpo in moto può essere calcolata come media delle velocità iniziali e finali. In formule:

$$v_{media} = \frac{v_i + v_f}{2}$$

Il primo passo è quello di scrivere una legge oraria "semplificata" utilizzando l'espressione di velocità media appena scritta:

$$S = v_{media}\ t$$

In realtà, tale espressione è in parte insoddisfacente perché in essa non compare in forma esplicita l'espressione dell'accelerazione, che qui ricordiamo:

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_{finale} - \mathbf{v}_{iniziale}}{\Delta t}$$

Proviamo, però, a riscrivere questa ultima equazione in modo più comodo ponendo, ad esempio, l'istante iniziale $t_i = 0$ ed eliminando il pedice "f" per indicare come tempo finale un istante qualsiasi. Si ottiene, esplicitando rispetto alla velocità:

$$a\ (t_f - t_i) = v_f - v_i$$

$$a\ t_f = v_f - v_i$$

$$v_f = a\ t_f + v_i$$

$$v_f = at + v_i$$

Se ora inseriamo l'ultima espressione nella precedente formulazione $S = v_{media}\ t$ si ottiene:

$$S = v_{media}\ t = (v_f + v_i)\ t/2 = [(at + v_i) + v_i]\ t/2 = [at + 2\ v_i]\ t/2$$

$$S = ½\ a\ t^2 + v_i\ t$$

che è proprio **la legge oraria del M.R.U.A**.

In definitiva, per affrontare le problematiche relative a questa parte della cinematica sarà sufficiente tenere in considerazione queste tre equazioni:

$$\boxed{\begin{array}{c} S = v_{media}\ t \\ v_f = at + v_i \\ S = ½\ a\ t^2 + v_i\ t \end{array}}$$

Solo in qualche situazione molto particolare potrebbe essere necessario mettere a sistema due di queste tre relazioni per ottenere l'equazione risolvente.

Grafici orari - Utilizziamo ancora la rotaia a cuscino d'aria avendo la precauzione di inclinarla leggermente in modo da ottenere un moto accelerato più lento e più facilmente studiabile di quello di un oggetto in caduta libera lungo una direzione verticale. E' lo stesso accorgimento utilizzato da Galileo per rallentare le velocità in modo da eseguire con maggiore precisione e facilità lo studio dei moti accelerati: nel Seicento non esistevano certo i cronometri elettronici e le misure di tempo erano eseguite dallo scienziato pisano con un "orologio ad acqua". Inclinando la nostra rotaia a cuscino d'aria realizziamo quello che Galileo chiamò *piano inclinato*.

Con l'aiuto delle fotocellule e con il cronometro elettronico, costruiamo ora delle tabelle orarie *spazio-tempo* e *velocità-tempo*. Mettiamo i dati in un grafico cartesiano e analizziamo con attenzione le curve ottenute.

Possiamo notare come il grafico orario spazio-tempo sia una semiparabola con il vertice nell'origine degli assi, mentre il grafico orario velocità-tempo sia rappresentato da una retta uscente dall'origine. Se il moto ha invece inizio con velocità $v_i = v_0$ diversa da zero, la retta ha inizio da un punto dell'asse delle ordinate di valore pari a $v_i = v_0$.

spazio (cm)	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
tempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Fig. 9 – *Dati sperimentali relativi al moto rettilineo uniformemente accelerato*

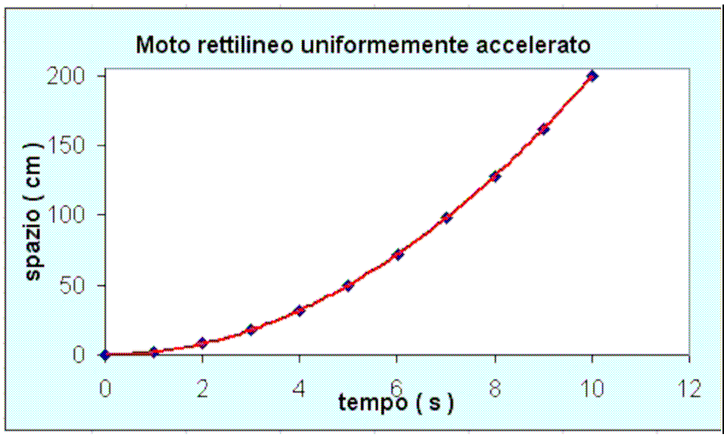

Fig. 10 - *Grafico orario spazio-tempo del moto rettilineo uniformemente accelerato*

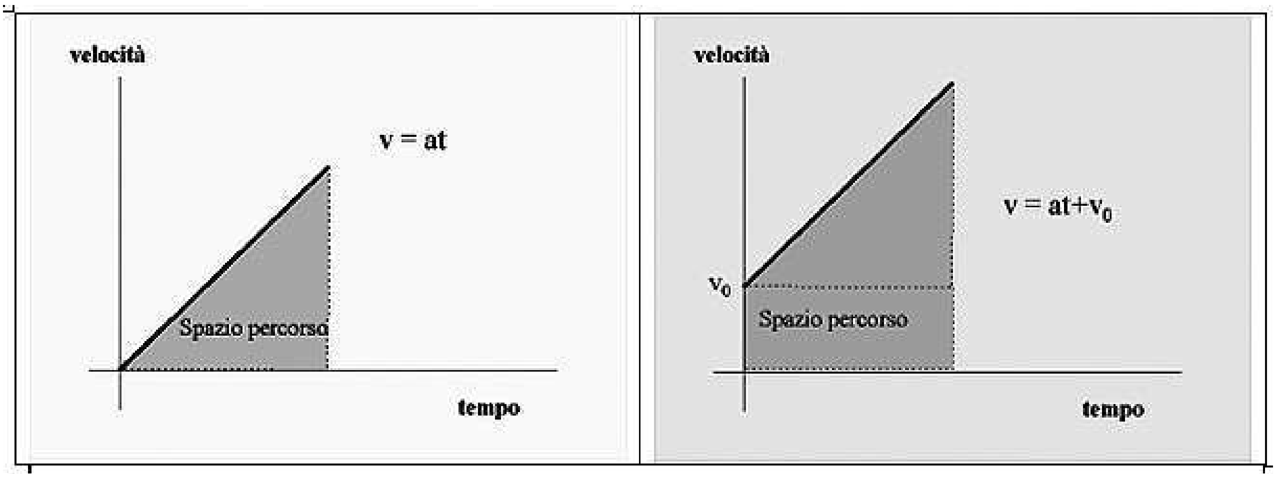

Fig. 11 - *Grafico orario velocità-tempo di un moto rettilineo uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla (a sinistra) e velocità iniziale* v_0 *(a destra). L'area evidenziata in grigio fornisce il valore dello spazio percorso.*

In conclusione:

- **Grafico spazio-tempo**: l'andamento cartesiano è quello di una semiparabola. I*l coefficiente angolare della retta tangente al grafico in un qualunque punto P fornisce il valore della velocità istantanea in quella situazione.*
- **Grafico velocità-tempo**: è formato da una retta di coefficiente angolare *m*. Se la velocità iniziale è nulla, queste rette partono dall'origine, per cui *si può facilmente ricavare il valore numerico dell'accelerazione dal calcolo del coefficiente angolare m*.
- **Grafico velocità-tempo**: anche in questo caso, come per il moto rettilineo uniforme, *l'area racchiusa tra la retta e l'asse delle ascisse assume il significato di spazio percorso*. In particolare, considerando il caso in cui la velocità iniziale sia nulla, l'area in questione é quella di un triangolo rettangolo (per velocità iniziali diverse da zero, si ha invece un trapezio).

  Area = v Δt = *spazio percorso*

5.9 Un'equazione senza tempo …

Nella risoluzione di alcuni problemi di cinematica si può arrivare al risultato senza utilizzare la variabile tempo. Consideriamo la legge oraria espressa tramite la velocità media:

$$S = v_{media}\, t$$

Poiché il moto è rettilineo uniformemente accelerato, posso sostituire alla velocità media la media delle velocità iniziali e finali. Quindi, in questo caso (e solo in questo caso):

$$S = \tfrac{1}{2}(v_i + v_f)t$$

Bisogna ora ricordare la definizione di accelerazione, da cui si può esplicitare il tempo in questo modo:

$$t = (v_f - v_i) / a$$

Sostituendo nell'equazione precedente e riconoscendo la presenza di un prodotto notevole tra le velocità, otteniamo:

$$S = \tfrac{1}{2}(v_i + v_f)(v_f - v_i) / a$$

$$\boxed{2aS = v^2_f - v^2_i}$$

che è l'espressione cercata.

5.10 Il moto verticale dei gravi

Si chiama *accelerazione di gravità g* l'accelerazione con cui gli oggetti sono naturalmente attratti verso il centro della Terra.

Fu Galileo a definire **gravi** tutti *i corpi in moto vicino alla superficie terrestre che siano sottoposti all'accelerazione di gravità* g.

Se il moto avviene lungo una direzione verticale si parla di movimento in **caduta libera.** Fu sempre Galileo a scoprire che tutti i corpi, indipendentemente dalla loro massa, forma e dimensione, cadono con la stessa accelerazione: g = 9,81 m/s^2.

Questa affermazione, di importanza cruciale, porta alla conclusione che oggetti fondamentalmente diversi, come un sasso e una piuma, se lasciati cadere dalla stessa quota di partenza e con la stessa velocità iniziale, giungono a terra nello stesso istante.

Ora, l'esperienza di ogni giorno sembrerebbe dimostrare proprio il contrario, ma, afferma Galileo, ciò succede perché l'attrito offerto dalla resistenza dell'aria agisce in modo diverso su oggetti dalla forma e dalla massa differente, alterando il loro moto. Se si potesse eseguire l'esperimento, prosegue lo scienziato pisano, in assenza d'aria si arriverebbe al risultato che l'accelerazione di gravità *g* è la stessa per tutti i corpi.

Il valore di 9,81 m/s^2 non è costante in tutti i punti del globo: all'equatore, per via del rigonfiamento della forma della Terra che allontana la superficie dal centro della Terra, è leggermente minore ed ammonta a 9,789 m/s^2, mentre ai Poli risulta essere di 9,823 m/s^2. Alla latitudine di Milano (45° Nord) il valore è circa pari a 9,806 m/s^2. Inoltre, delle piccolissime variazioni possono avvenire localmente su piccola scala per colpa della conformazione geologica del sottosuolo, più denso in certe zone e meno denso in altre, per le diverse concentrazioni nel sottosuolo di graniti, basalti, sabbie, rocce vulcaniche ed altro...

L'accelerazione di gravità dipende anche dalla massa e dalle dimensioni del pianeta su cui ci si trova: sulla Luna, ad esempio, essa è 1/6 di quella terrestre e si ha g_{Luna} = 1,6 m/s^2. Su Marte, più grande della Luna ma di dimensioni minori di quelle del nostro pianeta, essa vale g_{Marte} = 3,6 m/s^2, mentre su Giove, il maggiore dei pianeti del Sistema Solare, la gravità vale g_{Giove} = 23,12 m/s^2.

Nell'affrontare i problemi relativi al moto dei gravi bisogna infine tenere presente che, mentre la scelta della direzione positiva di moto è assolutamente arbitraria, il verso dell'accelerazione di gravità è fissato a priori, essendo *g* un *vettore parallelo alla verticale* e *sempre diretto verso il basso*.

Ad esempio; se un oggetto viene lanciato dal basso verso l'alto con velocità iniziale definita positiva, l'accelerazione, essendo diretta verso il basso, assume segno negativo. I due segni algebrici contrari determinano quindi una "decelerazione" del corpo in moto, che è quello che si verifica nella realtà quando esso sale di quota e, rallentando, arriva ad un punto in cui si ferma per poi iniziare a ricadere verso il basso. In questa seconda fase del moto, quella di ricaduta, il verso della velocità e dell'accelerazione sono concordi (entrambi diretti verso il basso) quindi si ha una vera e propria "accelerazione" con un aumento del modulo della velocità (ora di segno negativo, perché diretta verso il basso).

La legge oraria che si ottiene è quella di un normalissimo moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione a = *g*.

Per cui possiamo scrivere:

$$s=\frac{1}{2}gt^2+\mathrm{v}_{\mathrm{i}}t$$

Indice