Capitolo 6

La cinematica dei moti piani

6.1 Il principio di composizione dei moti simultanei

Abbiamo visto, nei paragrafi precedenti, come un oggetto portato ad una quota *h* e lasciato libero di muoversi cada verso terra seguendo una traiettoria rettilinea con accelerazione costante *g*. Supponiamo ora di considerare un secondo oggetto, simile al precedente, posto alla stessa quota *h*, e di lasciarlo cadere imprimendogli però, nell'istante iniziale, una velocità orizzontale non nulla. Tale oggetto arriverà a terra dopo aver percorso una traiettoria curvilinea che lo ha portato ad allontanarsi dal punto di partenza anche in direzione orizzontale.

Ci si può chiedere se i due oggetti toccano terra contemporaneamente oppure se il moto di caduta del secondo corpo sia stato in qualche modo influenzato dal possedere una componente orizzontale della velocità diversa da zero. Dare una risposta non è difficile: basta ricorrere all'uso di una cinepresa che riprenda per intero la traiettoria degli oggetti e che ne consenta il confronto istante dopo istante. Quello che si scopre è che il moto lungo la verticale dei due corpi è perfettamente identico, e la loro traiettoria differisce solo nella traslazione orizzontale evidenziata dal secondo oggetto.

Allo stesso risultato era giunto quasi cinque secoli fa anche Galileo Galilei quando enunciò il **principio di composizione** (o di indipendenza) **dei moti simultanei**, che può essere così espresso: *se un corpo è animato contemporaneamente da due movimenti, ciascuno dei due continua ad essere caratterizzato dalle stesse leggi che lo regolano quando si svolge da solo.*

Oppure, in termini perfettamente equivalenti: *un corpo soggetto a due movimenti simultanei dopo un tempo t occupa la stessa posizione che occuperebbe se avesse eseguito i due movimenti successivamente uno dopo l'altro.*

Gli esempi che seguono sono delle applicazioni del *principio di indipendenza dei moti simultanei* al caso dei gravi.

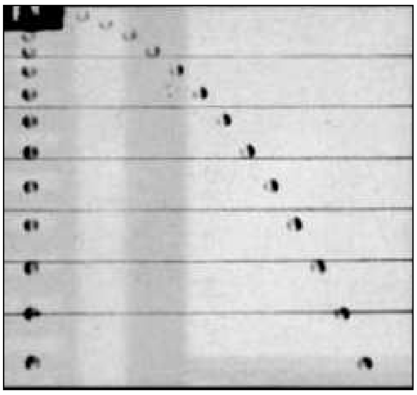


Fig. 1 - *Fotografia stroboscopia di due oggetti che cadono dalla stessa quota: il primo ha velocità iniziale nulla, il secondo velocità iniziale con componente orizzontale diversa da zero. Ad ogni istante si trovano alla stessa altezza: la componente orizzontale e quella verticale del moto del secondo oggetto sono tra loro indipendenti.*

6.2 Il moto parabolico dei gravi con velocità iniziale orizzontale

Applichiamo i concetti del paragrafo precedente al caso in cui un grave sia lanciato da una quota *h* con velocità iniziale v_{0x} completamente orizzontale.

Supponiamo di avere i seguenti valori iniziali:

$h = y_0 = 100$ m

$v_0 = v_{0x} = 5$ m/s

L'unica accelerazione presente è quella di gravità con $g = 9{,}8\ m/s^2$ che, come sappiamo, ha direzione esclusivamente verticale e quindi non influisce sul moto orizzontale degli oggetti. Possiamo così studiare il moto dividendolo in due parti tra loro indipendenti: in orizzontale avremo un moto rettilineo uniforme (senza accelerazione), in verticale un moto rettilineo uniformemente accelerato con $a = g$ e con velocità iniziale (verticale) nulla.

1) Determiniamo la **traiettoria** a partire dalle due leggi orarie:

asse x (MRU) $x = v_0\, t = 5\, t$

asse y (MRUA) $y = -\frac{1}{2} g t^2 + y_0 = -4{,}9\, t^2 + 100$

Eliminando il tempo dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda si ottiene la traiettoria:

$t = x / v_0 = x / 5 = 0{,}2\, x$

$y = -0{,}04\, x^2 + 100$

che è l'equazione di *una parabola* con la concavità rivolta verso il basso e vertice posto sull'asse delle ordinate nel punto (0,100). La traiettoria reale, considerata cioè solo per tempi positivi e per valori della quota h > 0, è *l'arco di parabola contenuta nel primo quadrante.*

2) Il **tempo di volo**, in questo caso, si riduce solo al tempo di caduta lungo l'asse verticale. Applicando il principio di composizione, considero l'equazione di un moto rettilineo uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla, ma posizione iniziale $y_0 = 100$ m

$y = -\frac{1}{2} g t^2 + 100$

L'istante di caduta lo ottengo quando l'oggetto tocca terra, cioè quando occupa la posizione a quota $y = 0$. Operando le debite sostituzioni nella legge oraria si ottiene:

$0 = - \frac{1}{2} g t^2 + 100$

$t_{cad} = 4{,}5$ s

3) Diventa ora semplice ottenere la **gittata** R, dove per gittata si intende *la distanza tra il piede della verticale passante per la posizione di lancio e il punto di ricaduta a terra.*

Tale valore è ottenuto studiando il moto solo nella sua componente orizzontale e ricavando lo spazio percorso dall'oggetto lungo l'asse delle x durante il tempo di caduta al suolo. Nel nostro caso otteniamo immediatamente:

$R = v_{0x}\, t_{cad} = 5 \times 4{,}5 \text{ m} = 22{,}5 \text{ m}$

6.3 Il moto parabolico dei gravi: caso generale

Affrontiamo ora il caso più generale possibile, in cui applicheremo il principio di indipendenza dei moti simultanei allo studio di un grave (proiettile) lanciato da una posizione posta a terra e lungo una direzione qualsiasi con velocità iniziale $\mathbf{v_0}$. Supponiamo, inoltre, che sia θ l'angolo tra il vettore velocità e il piano orizzontale: le due componenti di $\mathbf{v_0}$ lungo gli assi sono date da

$v_{0x} = v_0 \cos\theta$ $\qquad$ $v_{0y} = v_0 \,\mathrm{sen}\, \theta$

Trascuriamo come sempre la resistenza dell'aria e suddividiamo il moto complessivo del grave, che avviene nel piano *x*, *y* nella composizione di due moti rettilinei: un *moto rettilineo uniforme* lungo l'asse *x*, e uno *rettilineo uniformemente accelerato* con accelerazione a = *g* (diretta verso il basso) lungo l'asse *y*. Questo procedimento, di scomporre un problema complesso (moto nel piano) nella somma di più problemi semplici (due moti rettilinei), rappresenta una procedura standard nell'indagine fisica e nel caso specifico consente di arrivare velocemente al risultato voluto.

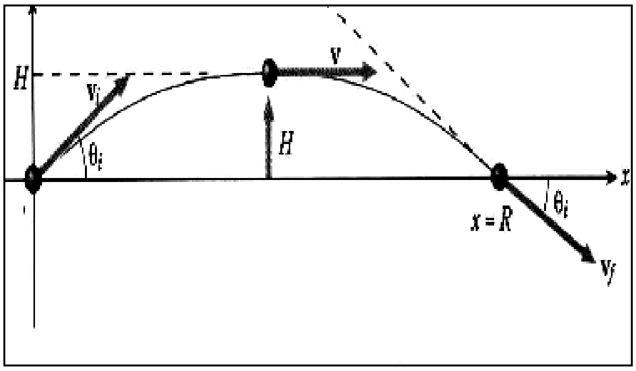


Fig.2 – *Moto parabolico dei gravi. Il punto di lancio è a livello del terreno.*

1) Determiniamo la **traiettoria**. Le equazioni di moto lungo i due assi sono:

asse *x* (MRU) $\qquad x = v_{0x}\, t$

asse y (MRUA) $\qquad y = - \frac{1}{2} g t^2 + v_{0y}\, t$

Per ottenere la traiettoria, eliminiamo il tempo ricavandolo dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda. Si ottiene:

$$y = - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2} + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x$$

Questa è l'equazione di una *parabola* del tipo

$y = - a x^2 + b x$

passante per l'origine e con concavità rivolta verso il basso. La composizione di due moti rettilinei, uno uniforme e l'altro uniformemente accelerato, ha dato luogo ad una traiettoria piana di tipo parabolico.

2) Determiniamo **la massima quota H** raggiunta.

A tale scopo utilizziamo ancora il principio di composizione dei moti simultanei considerando la proiezione della traiettoria parabolica sull'asse delle ordinate: studiamo, cioè, solo la componente verticale di moto, e riduciamo di fatto un moto a due dimensioni nel piano *x*, *y* ad un moto rettilineo uniformemente accelerato sull'asse delle ordinate. Possiamo allora usare l'equazione

$v_{fin}^2 = v_0^2 + 2as$

Nel nostro caso sia ha:

$v_{fin} = 0$ (perché nel punto più alto l'oggetto si ferma)

$v_0 = v_{0y}$

$a = - g$

$s = H$

Sostituendo

$$H = \frac{v_{fin}^2 - v_{0y}^2}{-2g} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

che è il valore cercato della massima quota raggiunta

3) Calcoliamo il **tempo di volo**.

Anche in questo caso semplifichiamo il problema considerando solo la proiezione lungo l'asse delle ordinate della vera traiettoria bidimensionale: di nuovo otteniamo un moto rettilineo uniformemente accelerato. Il tempo di volo sarà allora definito come il tempo necessario all'oggetto per raggiungere la massima quota H e poi ritornare al punto di partenza.

Una ulteriore semplificazione può essere introdotta al seguito di questa considerazione: se si trascura la resistenza dell'aria, il moto dell'oggetto nella sua fase ascendente è simmetrico a quello della fase discendente. Il tempo di salita risulta allora uguale al tempo di discesa e il tempo di volo totale può essere ottenuto semplicemente raddoppiando il solo tempo di salita.

Studio solo il moto di salita. Dalla definizione di accelerazione :

$a = (v_{fin} – v_{in})/ t$

nel nostro caso

$a = - g$

$v_{fin} = 0$

$v_{in} = v_{0y}$

per cui, sostituendo ed esplicitando rispetto al tempo:

$$t = \frac{- v_{0y}}{- g} = \frac{v_{0y}}{g}$$

che fornisce il solo *tempo di salita* verso il punto di massima quota. Il tempo di volo totale sarà il doppio:

$$t_{volo} = 2\frac{v_{0y}}{g}$$

4) Calcoliamo la **gittata** R.

Questa volta usiamo il principio di composizione dei moti per isolare il solo moto lungo l'asse *x*. A tale proposito avevamo già detto che si tratta di un moto rettilineo uniforme con velocità iniziale v_{0x}. Il calcolo della gittata R lo si esegue valutando lo spazio percorso lungo l'asse orizzontale durante il tempo che l'oggetto rimane in volo, cioè:

$$R = v_{0x}\, t_{volo} = 2\frac{v_{0x}\, v_{0y}}{g}$$

5) Dimostriamo ora che *si ottiene lo stesso valore per la gittata R, a parità del modulo della velocità iniziale, se l'oggetto è lanciato lungo due direzioni che formano angoli simmetrici rispetto al valore θ = 45°.*

Riscrivendo la formula della gittata con le funzioni trigonometriche si ottiene:

$$R = 2\frac{v_{0x}\, v_{0y}}{g} = 2\frac{v_0^{\,2}\cos\alpha\sin\alpha}{g}$$

Per angoli θ < 90° valgono le seguenti proprietà :

sen θ *= cos (90 -* θ*)* *cos* α *= sen (90 -* θ*)*

il valore della gittata R è lo stesso, ad esempio, per un angolo θ = 20° e per θ = 70°, oppure per la coppia θ = 35° e θ = 55°, e ancora, per i valori θ = 44° e θ = 46° … tutti simmetrici del valore θ = 45°. Quindi, un oggetto lanciato con una determinata velocità iniziale lungo un angolo che forma, ad esempio, 0° rispetto al terreno, cadrà nello stesso punto di un oggetto lanciato a 90°: … cioè sui piedi di chi esegue l'esperimento !!!

6) Rimane da dimostrare che cosa succede se l'angolo di lancio è proprio θ = 45°.

Non daremo la dimostrazione matematica, ma ci aiuteremo con la seguente osservazione. L'esperienza dimostra che, se l'angolo di lancio θ aumenta dal valore 0° a 45°, anche la gittata R aumenta. Se invece si supera il valore di 45°, la gittata inizia a diminuire riassumendo i valori già ottenuti per angoli di lancio pari a (90 - θ).

In conclusione, *per un angolo di lancio θ = 45°, la gittata assume il suo valore massimo.*

7) Si lascia allo studente dimostrare, con semplici passaggi algebrici, che tra la massima quota H, la gittata R e l'angolo di lancio θ, esiste la relazione

$$4H = R\tan(\theta)$$

Osservazione: Il principio di composizione dei moti mi permette di ottenere con facilità anche il modulo del vettore velocità **v** in un qualunque istante e in un qualunque punto della traiettoria.

Prendiamo, ad esempio, un punto P che sia posto a metà della quota *h* rispetto a terra. Scomponiamo la velocità lungo la direzione verticale ed orizzontale. La componente orizzontale rimane invariata, poiché abbiamo visto che il moto è rettilineo uniforme e tale rimane. Quindi:

$$v_{Px} = v_{0x} = 5 \text{ m/s}$$

La componente verticale è invece animata da un moto uniformemente accelerato, e dopo aver percorso un tratto *h/2* il suo valore è:

$$v_{P\,y}^{\;2} = v_{0\,y}^{\;2} + 2\,g\,h/2$$

In questa espressione si è convenuto di prendere il punto di partenza come punto origine degli assi, e come direzione positiva di moto quella dell'asse delle ordinate diretto verso il basso !! *Una tale manipolazione del sistema di riferimento rispetto a cui scrivere le equazioni di moto è perfettamente lecita, non porta ad errori se usata con attenzione, ed è consigliata ogni volta che introduce sensibili semplificazioni alle stesse equazioni.* Eseguite le debite sostituzioni:

$$v_{P\,x}^{\;2} = 0 + 2g \cdot h/2 \qquad \text{da cui}$$

$$v_{Py} = 31{,}3 \text{ m/s}$$

Il modulo della velocità in P sarà dato da:

$$v_P^{\;2} = [(5)^2 + (31{,}3)^2\,]\ m^2/\,s^2$$

che fornisce il valore

$$v_P = 31{,}7 \text{ m/s}$$

Per la direzione e per il verso di **v** occorre osservare che il vettore velocità istantanea è sempre tangente alla traiettoria nel punto considerato. Se invece vogliamo la conoscenza precisa dell'angolo formato rispetto agli assi cartesiani, dobbiamo applicare i teoremi di risoluzione alle componenti di **v**: detto θ l'angolo formato rispetto alla direzione orizzontale, si ha

$$v_x \cos\theta = v_P \qquad \theta = \arccos\,(\,v_x / v_P\,)$$

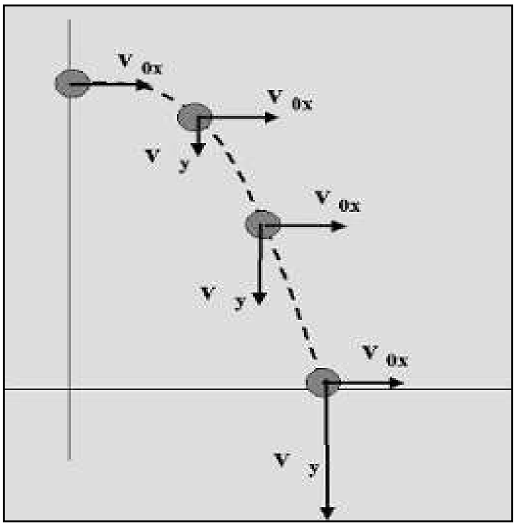


Fig. 3 - *La componente orizzontale della velocità rimane costante ed uguale al valore iniziale v_{0x} . La componente verticale v_y è inizialmente nulla e aumenta procedendo verso il basso. Il vettore velocità, somma vettoriale delle sue due componenti, non è rappresentato in figura, ma é in ogni punto tangente alla traiettoria.*

6.4 Il moto parabolico dei gravi con velocità iniziale di direzione qualunque e quota di lancio H

E' questo il caso più generale e complesso del moto dei gravi nel piano. Non sono però richieste conoscenze superiori a quelle già esposte nei due paragrafi precedenti, e uno studente attento può ora risolvere da solo questo tipo di problemi. Due osservazioni:

1) in questo caso la traiettoria non è più simmetrica rispetto al vertice, quindi il tempo di salita e di discesa sono ora diversi (sempre trascurando la resistenza dell'aria)

2) la massima gittata non si ha più per angoli di lancio pari ad θ = 45°. La trattazione matematica di questo punto è un po' più complessa e la tralasciamo.

6.5 Direzione del vettore velocità in moti curvilinei

Consideriamo una generica traiettoria curva e siano A e B le posizioni occupate agli istanti t_1 e t_2 da un generico oggetto in moto (fig. 13). Analogamente a quanto fatto con la definizione di *velocità media* e *velocità istantanea* in moti rettilinei (fig. 5), si consideri ora il vettore spostamento $\Delta \mathbf{s}$ che unisce i punti A e B. La sua **direzione** coincide con la direzione del vettore *velocità media* per la definizione stessa di velocità:

$$\mathbf{v_m} = \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t}$$

Attenzione: non possiamo fare nessuna osservazione sul modulo della velocità o sulla pendenza della retta passante per A e B perché il grafico in questione non è un grafico orario, ma una traiettoria. Ci manca, quindi, ogni riferimento alla variabile tempo.

Se ora consideriamo intervalli di tempo sempre più piccoli, al limite infinitesimi, è ragionevole supporre che il punto B si troverà in posizioni sempre più vicine ad A, e la retta per A e B tenderà a confondersi con la retta tangente alla traiettoria nel punto A. *Questa sarà anche la direzione del vettore velocità istantanea in A.*

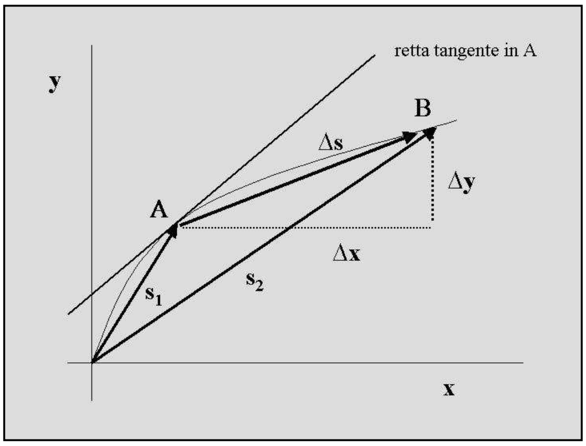


***Fig. 4** - La direzione del vettore velocità istantanea in un qualunque tipo di moto é data da* $\Delta \mathbf{s}$ *e la si ottiene quando, per istanti di tempo infinitesimi, il punto B tende al punto A. Essa è sempre tangente alla traiettoria nel punto considerato.*

6.6 Il moto circolare uniforme (M.C.U.)

Un corpo si muove di **moto circolare uniforme** se *la sua traiettoria è una circonferenza e se il modulo del vettore velocità rimane costante nel tempo.*

Poiché, come abbiamo visto in precedenza, il vettore velocità **v** è in ogni punto sempre tangente alla traiettoria, in questo tipo di moto la sua direzione cambia istante dopo istante. Ciò è sufficiente per affermare che il vettore **v** non si mantiene costante nel tempo[1] e che quindi un moto circolare uniforme è sempre inevitabilmente caratterizzato dalla presenza di una accelerazione a cui si dà il nome, per motivi che saranno chiari più avanti, di **accelerazione centripeta**.

[1] Ricordiamo che una grandezza vettoriale è caratterizzata da un modulo, una direzione e un verso. Se anche una sola di queste proprietà varia nel tempo, il vettore non può essere considerato costante.

Il calcolo del modulo della velocità lo si ottiene dividendo lo spazio percorso, individuato dall'arco di circonferenza *AP*, per il tempo *t* impiegato a percorrerlo. Ricordando però che in un moto uniforme vengono percorsi spazi uguali in tempi uguali, è sufficiente eseguire una scelta di comodo per arrivare all'espressione desiderata: possiamo, cioè, considerare come spazio percorso la lunghezza dell'intera circonferenza $2\pi R$ diviso il tempo t impiegato per compierla:

$$\mathrm{v} = \frac{arco\ AP}{t} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{v} = \frac{2\pi \mathrm{R}}{\mathrm{T}}$$

Chiameremo questa espressione **velocità tangenziale** (in virtù del fatto che la direzione di **v** è sempre tangente alla traiettoria circolare). L'unità di misura è espressa in *m/s*.

Si definisce **periodo** il tempo T richiesto al corpo in movimento per *percorrere un giro completo e per ritornare al punto di partenza.* Il moto circolare, infatti, svolgendosi su di una traiettoria chiusa su se stessa, è un moto periodico in quanto si ripete sempre uguale a se stesso dopo ogni giro effettuato e dopo ogni intervallo di tempo pari a T. Il periodo si misura in secondi *s*.

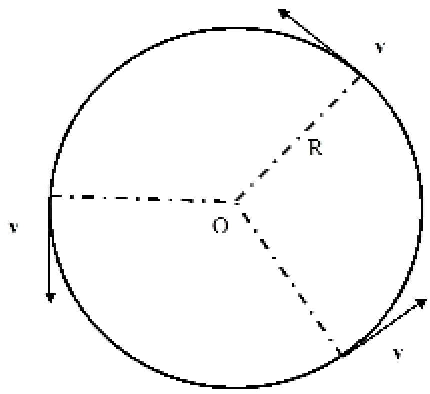


Fig. – *In un moto circolare uniforme è un moto periodico in cui il modulo della velocità* **v** *rimane costante mentre la direzione del vettore velocità, essendo sempre tangente alla traiettoria, cambia ad ogni istante.*

Una caratteristica fondamentale dei moti periodici è la **frequenza f**, definita come il *numero di giri compiuti al secondo*:

$$f = \frac{numero\ di\ giri}{s}$$

L'unità di misura è l'*Hertz,* le cui dimensioni sono pari all'inverso di un tempo: *Hertz = 1/s.* E' immediato riconoscere una stretta correlazione tra le due grandezze: per come sono state definite, la *frequenza* non è altro che l'inverso del *periodo,* quindi

$$f = \frac{1}{T}.$$

Deduzione della legge oraria – La definizione di velocità tangenziale non ci permette di ricavare direttamente da essa la legge oraria del moto per due motivi:

1) non contiene la variabile che esprime la posizione occupata ad ogni istante dal corpo in moto.
2) essendo una espressione dipendente dal raggio R della circonferenza percorsa, essa fornisce un valore diverso per ogni punto interno al disco di centro O, dove, a parità di tempo *t*, la lunghezza dell'arco percorso diminuisce al ridursi di R. La velocità tangenziale non è quindi lo strumento più adatto per esprimere le modalità di rotazione dell'intero disco pieno, i cui punti risulterebbero avere velocità di entità diversa.

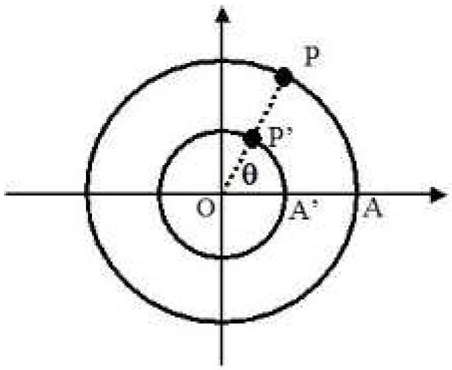
Per risolvere la questione introduciamo il concetto di *posizione angolare* θ occupata da un punto P in moto su una circonferenza di raggio R e centro O (coincidente con l'origine di un sistema di assi cartesiani) facendo riferimento all'angolo che si viene a formare tra la direzione positiva dell'asse delle ascisse e la direzione del raggio OP. Al variare della posizione di P nel tempo, l'angolo θ identifica il suo spostamento in un modo indipendente dal raggio R e assume lo stesso valore anche per tutti i punti interni alla circonferenza.

Definisco **velocità angolare** del punto P la seguente espressione:

$$\omega = \frac{\textit{posizione angolare}}{\textit{tempo}} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Si noti come questa definizione di velocità, essendo indipendente da R, dia lo stesso valore numerico per tutti i punti della circonferenza e del disco al suo interno. Infatti, mentre la velocità tangenziale dei punti P e P' è diversa, perché a parità di tempo trascorso percorrono spazi diversi (l'arco AP è maggiore dell'arco A'P'), le loro velocità angolari sono identiche perché i due punti hanno effettuato lo stesso spostamento angolare θ.

Fig . – *Velocità tangenziale e velocità angolare*



E' naturale chiedersi se esista un qualche tipo di legame tra le due velocità che caratterizzano i moti circolari. La risposta è affermativa solo se l'angolo θ è espresso, invece che in gradi sessagesimali, in radianti.

Si definisce **radiante** *l'angolo al centro di una circonferenza che sottende un arco di lunghezza pari al raggio*. In riferimento alla figura, se si ha che AP = 1 R, allora θ = 1 rad. In modo analogo si può scrivere:

se AP = ¼ circonferenza = ¼ 2π R = ½ π R allora θ = ½ π rad = 90°

se AP = ½ circonferenza = ½ 2π R = π R allora θ = π rad = 180°

se AP = ¾ circonferenza = ¾ 2π R = 3/2 π R allora θ = 3/2 π rad = 270°

se AP = 1 circonferenza = 2π R = 2π R allora θ = 2π rad = 360°

L'angolo giro di 360° vale dunque 2π rad. Per consentire in modo agevole il passaggio dal calcolo dei gradi sessagesimali a quello dei radianti, può essere utile considerare la seguente proporzione:

$$360° : 2\pi \text{ rad} = \theta° : \theta \text{ rad}$$

Riprendiamo ora la definizione di *velocità angolare:*

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Poiché stiamo considerando un moto circolare "uniforme", cioè con il modulo della velocità costante nel tempo, spostamenti angolari uguali sono coperti in tempi uguali. Possiamo così eseguire una scelta di comodo considerando uno spostamento angolare pari all'angolo giro, e scrivere:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Ricordando poi il legame tra periodo T e frequenza *f*, è facile convincersi che l'espressione precedente è equivalente alla seguente:

$$\omega = 2\pi\, f$$

Dal confronto tra le rispettive equazioni, risulta infine evidente il legame tra velocità tangenziale e angolare:

$$\boxed{\mathrm{v} = \omega \mathrm{R}}$$

Abbiamo ora tutti gli strumenti necessari per dedurre la **legge oraria** del moto circolare uniforme. Per analogia con il moto rettilineo uniforme, consideriamo la legge:

$$S = vt + S_0$$

Sostituiamo ora alle grandezze lineari le analoghe grandezze circolari: la posizione angolare θ allo spazio percorso S e la velocità angolare ω alla velocità lineare v. L'equazione diventa:

$$\boxed{\theta = \omega t + \theta_0}$$

6.7 L'accelerazione centripeta e il moto dei satelliti

Poiché il vettore velocità **v** cambia direzione in ogni istante, in ogni moto circolare è inevitabilmente presente anche una accelerazione che, però, non altera il modulo della velocità ma solo la sua direzione. Dimostriamo ora che:

1) il vettore accelerazione è diretto in ogni istante verso il centro della circonferenza, da cui il nome di accelerazione "centripeta"

2) il modulo vale $\boxed{a = \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{R}}}$ oppure $a = \omega^2\, \mathrm{R}$

Prendiamo come esempio il moto di un satellite che orbita attorno alla Terra con velocità **v** ad una distanza R dal centro del pianeta e a quota r = 200 km dalla superficie terrestre. Sia P la sua posizione iniziale: supponendo per semplicità l'orbita circolare, dopo un (breve) intervallo di tempo Δt il satellite si troverà nella posizione P'', sempre a distanza R dal centro della Terra. Potremmo dire che il corpo non si è avvicinato al suolo perché, essendo "in orbita" lontano da Terra, su di esso non agisce l'accelerazione di gravità terrestre. In realtà, una distanza dal suolo di qualche centinaio di km (che è la quota a cui orbitano molti satelliti) fa diminuire di pochissimo il valore di *g*. A 200 km di quota abbiamo un valore che è ancora il 94% del valore misurato al suolo. Il satellite sta quindi *cadendo verso il centro della Terra muovendosi di moto accelerato, ma la sua velocità tangenziale lo sposta contemporaneamente verso l'alto (rispetto al suolo terrestre) di una quota pari allo spazio di caduta.*

Per meglio capire quello che succede dobbiamo utilizzare ancora una volta il *principio di indipendenza dei moti simultanei.* Consideriamo la figura: il satellite si trova inizialmente nel punto P, dove risente di una velocità iniziale (tangente all'orbita) di modulo "v" e di una accelerazione diretta verso il centro della Terra a = *g*. Dopo un (breve) istante di tempo Δt si ritrova nel diretta verso il centro della Terra a = *g*. Dopo un (breve) istante di tempo Δt si ritrova nel punto P'' dell'orbita.

Analizziamo il suo moto suddividendolo in due parti successive: quella tangente a velocità costante "v" che porta il corpo nel punto P' (allontanandolo da Terra), e quella in caduta libera con accelerazione diretta verso il centro della Terra che sposta il satellite da P' al punto P'' (riportandolo di nuovo sull'orbita).

Siano $S = vt$ la lunghezza del primo tratto PP' e h la lunghezza di questo secondo spostamento.

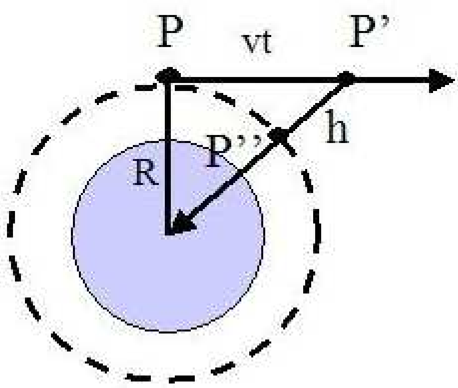


Fig. – *Moto di un satellite in orbita attorno alla Terra e deduzione dell'accelerazione centripeta.*

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo che si è venuto a formare:

$$(R+h)^2 = R^2 + (vt)^2$$

$$R^2 + 2Rh + h^2 = R^2 + v^2t^2$$

$$h\,(2R + h) = v^2t^2$$

Se si considera un intervallo di tempo Δt molto piccolo, la quantità "h" in parentesi è molto minore di 2R e può essere trascurata senza causare nessun errore. Abbiamo:

$$2Rh = v^2t^2$$

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{R}\right)t^2$$

Come volevasi dimostrare, questa è l'equazione di un moto uniformemente accelerato con *accelerazione diretta verso il centro della Terra* (quindi "centripeta"), il cui modulo è dato da:

$$a = \frac{v^2}{R}.$$

ES. 1 - *Una pistola spara un colpo lungo una direzione che forma un angolo di 60° con il terreno. Se il modulo della velocità iniziale del proiettile é v_0 = 300 m/s, calcolare: a) massima quota H b) tempo di volo t* c) gittata R*

▶

Si deve scomporre il moto lungo i due assi cartesiani: si ottiene un MRU lungo l'asse delle ascisse di velocità iniziale $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, e un MRUA lungo l'asse delle ordinate di velocità iniziale $v_{0y} = v_0$ sen α Assumiamo, per convenzione, la direzione positiva degli assi come direzione di moto: in tal caso le due velocità iniziali risultano positive e l'accelerazione di gravità negativa (perché diretta in verso rispetto alla velocità).

a) Il valore della massima quota H lo si ottiene studiando solo la componente del moto lungo l'asse Y. Vale l'espressione:

$$v_{fin}^2 = v_0^2 + 2\ a\ S$$

Nel nostro caso:

$$v_{fin} = 0,\ v_0 = v_0 \text{ sen } \alpha,\ \ a = -\ g,\ S = H.$$

Sostituendo i valori numerici ed esplicitando rispetto ad H si ottiene:

$$H = 3442 \text{ m}$$

b) Il tempo di volo t* è facilmente ricavabile dalla definizione di accelerazione applicata al moto lungo l'asse delle y ed osservando che esso è il doppio del solo tempo di salita t_{sal}.

$$-\ g = (v_{fin} - v_{0y})\ t_{sal}$$

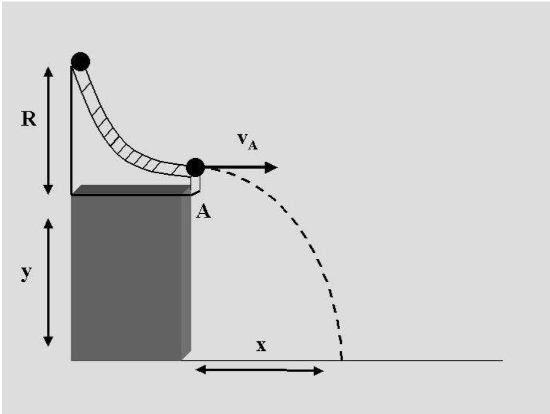
$$t_{sal} = 26{,}5 \text{ s}$$

$$t^* = 53 \text{ s}$$

c) Il valore della gittata R é deducibile dallo studio della componente orizzontale del moto. Lungo questa direzione la velocità é costante e il proiettile si allontanerà di un tratto R proporzionale al tempo di volo t*

$$R = v_{0x}\ t^* = 7950 \text{ m}$$

ES. 2 - *Un grave è lasciato cadere lungo un profilo circolare di raggio R = 40 cm posto sopra un rialzo di altezza y = 80 cm. Determinare l'equazione della traiettoria parabolica. A quale distanza x dalla verticale per A il grave toccherà terra?*



►

Separiamo il moto del grave in due parti: quella lungo il profilo circolare e quella di traiettoria parabolica. Al termine della prima fase l'oggetto giunge in A con velocità data *solo dalla differenza di quota* R secondo la relazione:

$$v_A = \sqrt{2gR}$$

Nella seconda fase l'oggetto inizia il suo cammino parabolico da A con velocità verticale nulla e velocità orizzontale pari a v_A: questo perché nel punto A il vettore $\mathbf{v}_A$, *tangente alla traiettoria*, possiede solo la componente orizzontale. Quindi, in A

$$v_{Ay} = 0, \qquad v_{Ax} = |\,\mathbf{v}_A\,|$$

Prendiamo ora A come punto origine e definiamo direzione positiva dell'asse delle y quella *diretta verso il basso* (é una scelta di comodo; non cambia nulla se decidiamo di considerare positiva la direzione verso l'alto ...). Il moto del grave è descritto dalla seguente coppia di equazioni:

$$x = v_A\, t$$

$$y = 1/2\; gt^2$$

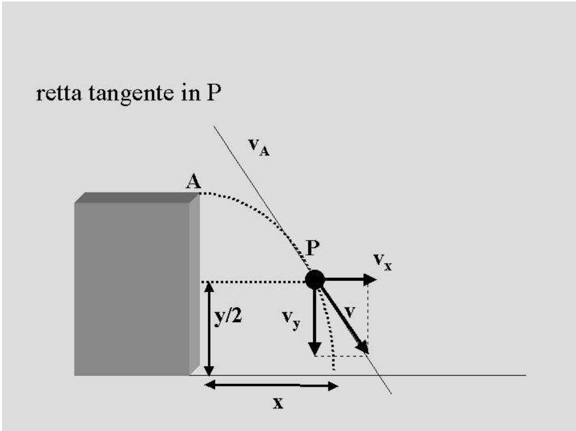
Per ottenere l'equazione della traiettoria basta ricavare il parametro t dalla prima equazione e sostituirlo nella seconda. Si ottiene la seguente parabola:

$$y = 1/2\; g\; \frac{x^2}{v_A^{\,2}}$$

Se ora poniamo $v_A = \sqrt{2gR}$, come ricavato in precedenza, e risolviamo rispetto alla gittata x, si può scrivere:

$$x = 2\sqrt{yR} = 1{,}13\ \text{m}$$

ES. 3 - *In riferimento all'esercizio precedente, si calcoli il valore della velocità istantanea in un punto P della traiettoria parabolica situato ad una quota y/2= 40 cm rispetto al terreno.*



▶

Calcoliamo le componenti della velocità in P.

v_x = velocità iniziale in A = $\sqrt{2gR}$ = 2,8 m/s

(il moto lungo l'asse delle x è rettilineo uniforme)

v_y = $\sqrt{2g.y/2}$ = 2,8 m/s

(la velocità verticale in A é nulla)

Il modulo della velocità istantanea in P é

v_P = $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ = 3,96 m/s

La direzione può essere ottenuta ricorrendo ai teoremi di risoluzione, oppure, molto più semplicemente, osservando che essa é data dall'ipotenusa di uno dei due triangoli rettangoli isosceli che si vengono a formare in P: quindi è una direzione che forma un angolo di 45° (verso il basso) con la direzione positiva dell'asse delle ascisse.

Indice