Capitolo 12

La cinematica dei moti piani

12.1 Il principio di indipendenza dei moti simultanei

Abbiamo visto, nei paragrafi precedenti, come un oggetto portato ad una quota h e lasciato libero di muoversi cada verso terra seguendo una traiettoria rettilinea con accelerazione costante pari all'accelerazione di gravità: $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

Consideriamo ora un secondo oggetto, simile al precedente, posto alla stessa quota h, e lasciamolo cadere imprimendogli però, nell'istante iniziale, una velocità orizzontale non nulla. Tale oggetto arriverà a terra dopo aver percorso una traiettoria curvilinea che lo ha portato ad allontanarsi dal punto di partenza anche in direzione orizzontale.

Ci si può chiedere se i due oggetti toccano terra nello stesso tempo oppure se il moto di caduta del secondo corpo sia stato in qualche modo influenzato dal possedere una componente orizzontale della velocità diversa da zero. Dare una risposta non è difficile: basta ricorrere all'uso di una cinepresa che riprenda per intero la traiettoria degli oggetti e che ne consenta il confronto istante dopo istante. Quello che si scopre è che il moto lungo la verticale dei due corpi è perfettamente identico, e la loro traiettoria differisce solo nella traslazione orizzontale evidenziata dal secondo oggetto.

Allo stesso risultato era giunto quasi cinque secoli fa anche Galileo Galilei quando enunciò **il principio di composizione (o di indipendenza) dei moti simultanei**, che può essere così espresso:

Se un corpo è animato contemporaneamente da due movimenti, ciascuno dei due avviene come se l'altro movimento non ci fosse.

Oppure, in termini perfettamente equivalenti:

Un corpo soggetto a due movimenti simultanei dopo un tempo t occupa la stessa posizione che occuperebbe se avesse eseguito i due movimenti successivamente uno dopo l'altro.

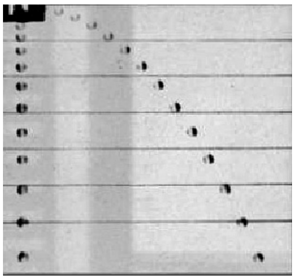


Figura 12.1: *Fotografia stroboscopia di due oggetti che cadono dalla stessa quota: il primo ha velocità iniziale nulla, il secondo velocità iniziale con componente orizzontale diversa da zero. Poiché ad ogni istante si trovano alla stessa altezza, la componente orizzontale e quella verticale del moto del secondo oggetto sono tra loro indipendenti.*

12.2 Il moto parabolico dei gravi: velocità iniziale orizzontale

Applichiamo i concetti del paragrafo precedente al caso in cui un grave sia lanciato da una quota h con velocità iniziale v_{0x} completamente orizzontale.

Per comodità, decidiamo di porre l'origine degli assi O nel punto iniziale del moto e di prendere come positiva la direzione *verso il basso.*

Studiamo ora il moto dividendolo in due parti tra loro indipendenti:

1) in orizzontale avremo un moto rettilineo uniforme (quindi senza accelerazione e con velocità costante: v_{0x})

2) in verticale un moto rettilineo uniformemente accelerato, con a $= +g$ e con velocità iniziale (verticale) nulla: $v_{0y} = 0$.

Traiettoria

Poiché il moto avviene contemporaneamente in due direzioni, mettiamo a sistema le due leggi orarie e eliminiamo il parametro tempo: t.

$$\begin{cases} x = v_{0x}\, t \\ y = \frac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{v_{0x}} \\ y = \frac{1}{2} g\, \dfrac{x^2}{v_{0x}^2} \end{cases}$$

Scopriamo così che la traiettoria è una *parabola* con la concavità rivolta verso la direzione positiva delle ordinate (nel nostro caso verso il basso) di equazione:

$$y = \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2}\, x^2 \tag{12.1}$$

La traiettoria reale, considerata cioè solo per tempi positivi $t < 0$, è l'arco di parabola contenuta nel primo quadrante.

Il tempo di volo

Si definisce *tempo di volo* l'intervallo di tempo necessario affiché il grave tocchi terra. Per calcolarlo, dobbiamo studiare il moto come se avvenisse solo lungo la direzione rettilinea

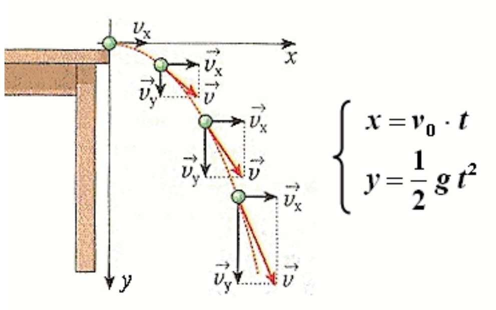


Figura 12.2: *Composizione dei moti orizzontale e verticale in un moto parabolico.*

verticale. Se il punto di lancio si trova ad una quota h rispetto al suolo, il problema diventa un classico esercizio di moto rettilineo uniformemente accelerato. Sappiamo, al proposito, che il tempo necessario per coprire uno spazio S = h e con una accelerazione a = g, è espresso dell'equazione:

$$S = \frac{1}{2} g t^2 \qquad \longrightarrow \qquad h = \frac{1}{2} g t_{volo}^2$$

Esplicitando rispetto al tempo:

$$t_{volo} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{12.2}$$

Gittata

Si definisce *gittata G* la *distanza tra il piede della verticale tracciata dal punto di lancio e il punto in cui il corpo tocca terra.*

Tale valore è ottenuto studiando il moto solo nella sua componente orizzontale ricavando lo spazio percorso dall'oggetto lungo l'asse delle x durante il tempo che impiega a cadere al suolo.

In formule:

$$G = v_{0x}\, t_{volo} \tag{12.3}$$

Concludiamo con la seguente importante osservazione. L'equazione della traiettoria (12.1) a cui siamo giunti è una espressione di secondo grado con il coefficiente di x^2 positivo: ad essa dovrebbe usualmente corrispondere il grafico cartesiano di una parabola con la concavità rivolta verso *l'alto.* Nel nostro caso, invece, la parabola ha concavità verso il *basso.* Ciò non costituisce una contraddizione con quanto noto dallo studio della geometria analitica in quanto, per motivi di scelta dettati alla comodità di calcolo, abbiamo deciso di considerare *positiva* la direzione verticale *verso il basso.*

12.3 Il moto parabolico dei gravi: caso generale

Affrontiamo ora il caso più generale possibile, in cui applicheremo il principio di indipendenza dei moti simultanei allo studio di un grave (proiettile) lanciato da una posizione posta a terra e lungo una direzione qualsiasi con velocità iniziale (vettoriale) $\mathbf{v}_0$.

Supponiamo, inoltre, che sia θ l'angolo tra il vettore velocità e il piano orizzontale: i moduli delle due componenti di $\mathbf{v}_0$ lungo gli assi sono dati da:

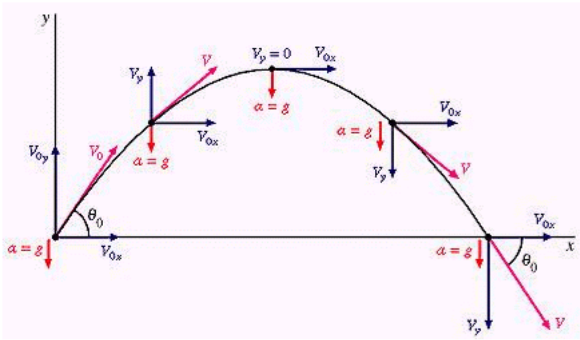


Figura 12.3: *Moto parabolico dei gravi: caso generale.*

$v_{0x} = v_0\, cos\theta$

$v_{0y} = v_0\, sen\theta$

Trascuriamo come sempre la resistenza dell'aria e suddividiamo il moto complessivo del grave, che avviene nel piano *(x,y)* nella composizione di due moti rettilinei: un moto rettilineo uniforme lungo l'asse x, e uno rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione a = g (diretta verso il basso) lungo l'asse y.

Nello studio del caso generale è più conveniente considerare *positiva* la direzione verticale *verso l'alto,* in coerenza con quanto siamo abituati a fare in matematica. L'accelerazione assumerà, di conseguenza, segno negativo: a = -g (il proiettile rallenta salendo).

Poniamo ancora l'origine del sistema di riferimento nel punto di lancio, questa volta situato a livello del terreno.

Traiettoria

Scriviamo le due equazioni di moto lungo gli assi, ricordando che in orizzontale il moto è rettilineo uniforme (M.R.U.), mentre in verticale è rettilineo uniformemente accelerato (M.R.U.A.).

$$\begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t \end{cases}$$

Ormai sappiamo che per ottenere la *traiettoria* dobbiamo eliminare il tempo dalla prima equazione e sostituirlo nella seconda.

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{v_{0x}} \\ y = -\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{x}{v_{0x}}\right)^2 + v_{0y}\left(\dfrac{x}{v_{0x}}\right) \end{cases}$$

Otteniamo così una parabola del tipo $y = ax^2 + bx$ data della seguente equazione:

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}\,x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}\,x \tag{12.4}$$

Massima quota H

A tale scopo utilizziamo ancora il *principio di composizione dei moti simultanei* considerando la proiezione della traiettoria parabolica sull'asse delle ordinate. Tale semplificazione ci consente di studiare solo la componente verticale della velocità, riducendo di fatto un moto a due dimensioni nel piano *(x, y)* ad un più semplice moto rettilineo uniformemente accelerato che si svolge sull'asse delle ordinate lungo un segmento di lunghezza H.

Nel punto più alto della traiettoria (ora considerata rettilinea), la componente verticale della velocità $v_{y\,fin}$ è nulla: il corpo si ferma un istante prima di ricadere verso il basso. Lo spazio persorso (in salita come in discesa) è H. La componente verticale della velocità iniziale è $v_{0y} = v_0 sen\theta$. L'accelerazione verticale è data dall'accelerazione di gravità, di segno negativo se consideriamo positiva la direzione verso l'alto: a = -g.

Tutte queste grandezze cinematiche posso essere messe in relazione tra loro dalla seguente (nota) espressione:

$$v_{fin}^2 = v_0^2 + 2aS$$

Nel nostro caso, possiamo scrivere:

$$v_{y\,fin}^2 = v_{0y}^2 - 2gH$$

$$0 = v_{0y}^2 - 2gH$$

$$H = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

Abbiamo così ottenuto, con semplici passaggi algebrici, il valore della massima quota H raggiunta da un corpo lungo la sua traiettoria parabolica:

$$H = \frac{v_{0y}^2}{2g} \tag{12.5}$$

Tempo di volo

Anche in questo caso possiamo semplificare il problema considerando la proiezione della traiettoria parabolica bidimensionale lungo l'asse delle ordinate. Di nuovo otteniamo un moto rettilineo uniformemente accelerato (decelerato in salita) lungo un segmento verticale di lunghezza H.

Il *tempo di volo* è definito come *il tempo necessario all'oggetto per percorrere la traiettoria completamente.*

Una ulteriore semplificazione può essere introdotta al seguito di questa considerazione: trascurando opportunamente la resistenza dell'aria, il moto dell'oggetto nella sua fase ascendente e poi in quella discendente sono perfettamente simmetrici: il tempo di salita risulta così uguale al tempo di discesa e il tempo di volo totale può essere ottenuto semplicemente raddoppiando il tempo di salita.

Studiamo il moto sul segmento H, posto sull'asse delle ordinate. Dalla definizione di accelerazione, si ottiene:

$$v_{y\,fin} = v_{0y} + at$$

Nel nostro caso la componente y della velocità finale è nulla (il corpo si ferma un istante e poi ricade al suolo), l'accelerazione vale a = -g (moto in frenata) e t_s è il tempo di salita verso il punto di massima quota H:

$$0 = v_{0y} - gt_s$$

$$t_s = \frac{v_{0y}}{g}$$

Il tempo di volo totale, nelle ipotesi fatte, sarà il doppio del tempo di salita:

$$t_{volo} = 2 \cdot \frac{v_{0y}}{g} \tag{12.6}$$

Gittata

Usiamo ora *il principio di composizione dei moti* per isolare solo il moto lungo l'asse x. Dobbiamo quindi studiare un moto rettilineo uniforme con velocità iniziale v_{0x}.

Il valore della gittata G è dato dalla lunghezza dello spostamento orizzontale calcolato durante il tempo che l'oggetto rimane in volo. In formule:

$$G = v_{0x}\, t_{volo} \tag{12.7}$$

Se ora nella formula della gittata (12.7) sostituiamo il tempo di volo (12.6) arriviamo alla seguente espressione:

$$G = 2 \cdot \frac{v_{0y} v_{0x}}{g} = 2 \cdot \frac{v^2}{g} cos\theta sen\theta$$

Concludiamo con le seguenti osservazioni:

1) per angoli complementari ($\theta = 10°$, $\theta = 80°$, oppure $\theta = 30°, \theta = 60°$, o anche $\theta = 40°$, $\theta = 50°$), il *valore della gittata G è lo stesso.*

2) la *gittata massima G_{Max}* si ottiene per un angolo di lancio pari a 45°.

3) in riferimento alle figure 12.2 e 12.3, in ogni punto della traiettoria il *modulo del vettore velocità* **v** è calcolabile dal teorema di Pitagora applicato alle sue componenti orizzontale v_{0x} (che rimane costante) e verticale v_{0y}:

$$v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}.$$

In particolare, *considerati due punti alla stessa quota, il modulo della velocità è lo stesso*: infatti, la componente orizzontale v_x è costante mentre quella verticale v_y assume due valori di segno opposto.

Dimotreremo in seguito che *il vettore velocità* **v** *risulta in ogni punto tangente alla traiettoria.* L'angolo che esso forma con la direzione orizzontale può essere facilmente calcolato con la relazione:

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right).$$

12.4 Il vettore velocità è tangente alla traiettoria

Vediamo di dare una dimostrazione dell'affermazione riportata nelle ultime righe del paragrafo precedente: la *direzione del vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria.*

La precisazione diventa importante nel caso in cui la traiettoria sia curva (parabola o circonferenza, ad esempio) perchè, nel caso di un moto rettilineo, la direzione della tangente ad una retta coincide con la retta stessa.

Consideriamo quindi una generica traiettoria curva e siano A e B le posizioni occupate agli istanti t_1, t_2 da un oggetto in moto (fig.12.4), rispettivamente rappresentate dai *vettori posizione* $\mathbf{S}_1$ e $\mathbf{S}_2$. Consideriamo il *vettore spostamento* $\triangle\mathbf{S}$ che unisce i punti A e B.

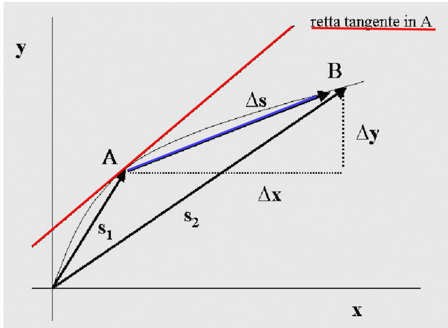


Figura 12.4: *La direzione del vettore velocità coincide per definizione con quella del vettore spostamento* $\triangle \boldsymbol{S}$*. Quando, per istanti di tempo infinitesimi, i punti A e B tendono a coincidere, tale direzione è sempre tangente alla traiettoria nel punto considerato A.*

Ricordando la definizione del vettore velocità media $\mathbf{v}_{media}$, possiamo notare come la direzione e il verso di $\triangle \mathbf{S}$ coincida necessariamente con la direzione e il verso di $\mathbf{v}_{media}$:

$$\mathbf{v}_{media} = \frac{\triangle \mathbf{S}}{\triangle t}$$

Se ora consideriamo intervalli di tempo sempre più piccoli, al limite infinitesimi (cioè tendenti a zero), è ragionevole supporre che il punto B si troverà in posizioni sempre più vicine ad A, e la retta per A e B su cui giace il vettore spostamento $\triangle \mathbf{S}$ (e di conseguenza il vettore velocità media) tenderà a *coincidere con la retta tangente alla traiettoria* nel punto A.

Per quanto detto prima, questa sarà anche la direzione del vettore velocità istantanea nel punto A, che altro non è se non la velocità media calcolata in intervalli di tempo infinitesimi...

12.5 Il moto circolare uniforme

Un corpo si muove di **moto circolare uniforme** se la sua *traiettoria è una circonferenza e se il modulo del vettore velocità rimane costante nel tempo.*

Poiché, come abbiamo visto in precedenza, il vettore velocità istantanea $\mathbf{v}$ è in ogni punto sempre tangente alla traiettoria, in questo tipo di moto la sua direzione cambia istante dopo istante. Ciò è sufficiente per affermare che il vettore $\mathbf{v}$ non si mantiene costante nel tempo[1] e che quindi un moto circolare uniforme è sempre inevitabilmente caratterizzato dalla presenza di una accelerazione a cui si dà il nome, per motivi che saranno chiari più avanti, di **accelerazione centripeta.**

Il calcolo del modulo della velocità lo si ottiene dividendo lo spazio percorso, individuato dall'arco di circonferenza AP, per il tempo t impiegato a percorrerlo. Ricordando però che in un moto uniforme vengono percorsi spazi uguali in tempi uguali, è sufficiente eseguire una scelta di comodo per arrivare all'espressione desiderata: possiamo, cioè, considerare come spazio percorso la lunghezza dell'intera circonferenza 2πR diviso il tempo T impiegato per compierla:

Chiameremo questa espressione **velocità tangenziale** (in virtù del fatto che la direzione di $\mathbf{v}$ è sempre tangente alla traiettoria circolare). L'unità di misura è espressa in m/s.

[1] Una grandezza vettoriale è caratterizzata da un modulo, una direzione e un verso. Se anche una sola di queste proprietà varia nel tempo, il vettore non può essere considerato costante.

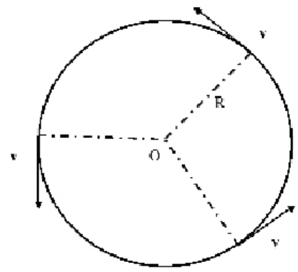


Figura 12.5: *Il moto circolare uniforme è un moto periodico in cui il modulo della velocità* **v** *rimane costante mentre la direzione del vettore velocità, essendo sempre tangente alla traiettoria, cambia ad ogni istante.*

$$v = \frac{2\pi R}{T} \tag{12.8}$$

Si definisce **periodo** il tempo T richiesto al corpo in movimento *per percorrere un giro completo e per ritornare al punto di partenza.* Il moto circolare, infatti, svolgendosi su di una traiettoria chiusa su se stessa, è un *moto periodico* in quanto si ripete sempre uguale a se stesso dopo ogni giro effettuato e dopo ogni intervallo di tempo pari a T. Il periodo si misura in secondi *s.*

Una caratteristica fondamentale dei moti periodici è la **frequenza f**, definita come *il numero di giri compiuti al secondo:*

$$f = \frac{numero\, giri}{s} \tag{12.9}$$

L'unità di misura è l'*Hertz*, le cui dimensioni sono pari all'inverso di un tempo: 1 *Hertz* = $1/s$. E' immediato riconoscere una stretta correlazione tra le due grandezze: per come sono state definite, la frequenza non è altro che l'inverso del periodo, quindi:

$$f = \frac{1}{T} \tag{12.10}$$

Legge oraria

La definizione di velocità tangenziale non ci permette di ricavare direttamente da essa la legge oraria del moto per due motivi:

1) non contiene la variabile che esprime la posizione occupata ad ogni istante dal corpo in moto

2) essendo una espressione dipendente dal raggio R della circonferenza percorsa, essa fornisce un valore diverso per ogni punto interno al disco di centro O, dove, a parità di tempo t, la lunghezza dell'arco percorso diminuisce al ridursi di R. La velocità tangenziale non è quindi il concetto più adatto per esprimere le modalità di rotazione dell'intero disco, i cui punti risulterebbero avere velocità di entità diversa.

Per risolvere la questione introduciamo il concetto di *posizione angolare* θ occupata da un punto P in moto su una circonferenza di raggio R e centro O (coincidente con l'origine di un sistema di assi cartesiani) facendo riferimento all'angolo che si viene a formare tra la direzione positiva dell'asse delle ascisse e la direzione del raggio OP.

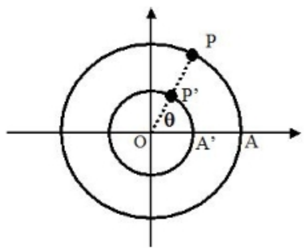


Figura 12.6: *La velocità angolare dei punti P e P' è la stessa, mentre è diversa la loro velocità tangenziale.*

Al variare della posizione di P nel tempo, l'angolo θ identifica il suo spostamento in un modo indipendente dal raggio R e assume lo stesso valore anche per tutti i punti interni alla circonferenza.

Definisco **velocità angolare** del punto P la seguente espressione:

$$\omega = \frac{posizione\, angolare}{tempo} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \frac{\triangle\theta}{\triangle t}$$

Si noti come questa definizione di velocità, essendo indipendente da R, dia lo stesso valore numerico sia per i punti della circonferenza che per quelli del disco al suo interno. Infatti, mentre la velocità tangenziale dei punti P e P' è diversa, perché a parità di tempo trascorso percorrono spazi diversi (l'arco AP è maggiore dell'arco A'P'), le *loro velocità angolari sono identiche perché i due punti hanno effettuato lo stesso spostamento angolare* $\triangle\theta$.

E' naturale chiedersi se esista un qualche tipo di legame tra le due velocità che caratterizzano i moti circolari.

Per rispondere dobbiamo prima esprimere l'angolo di posizione θ, invece che in gradi sessagesimali, in **radianti**.

Si definisce **radiante** *l'angolo al centro di una circonferenza che sottende un arco di lunghezza pari al raggio.*

In riferimento alla figura (12.6), se si ha che se AP = 1 R, allora θ= 1 *rad.* In modo analogo si può scrivere:

se	AP = $\frac{1}{4}$ circonferenza = $\frac{1}{4}$ 2π R = $\frac{1}{2}$ πR	allora	θ= $\frac{1}{2}$ π rad = 90°
se	AP = $\frac{1}{2}$ circonferenza = $\frac{1}{2}$ 2π R = πR	allora	θ= π rad = 180°
se	AP = $\frac{3}{4}$ circonferenza = $\frac{3}{4}$ 2π R = 3/2 πR	allora	θ= 3/2 π rad = 270°
se	AP = 1 circonferenza = 2πR = 2πR	allora	θ= 2π rad = 360°

L'angolo giro di 360° equivale dunque a 2π *rad.* Per consentire in modo agevole il passaggio dal calcolo dei gradi sessagesimali a quello dei radianti, può essere utile considerare la seguente proporzione:

$$360° \;:\; 2\pi = \theta° \;:\; \theta^{rad}$$

Riprendiamo ora la definizione di *velocità angolare*:

$$\omega = \frac{\triangle\theta}{\triangle t} \tag{12.11}$$

Poiché stiamo considerando un moto circolare "uniforme" (con il modulo della velocità costante nel tempo), *spostamenti angolari uguali sono coperti in tempi uguali.*

Possiamo così eseguire una scelta di comodo considerando uno spostamento angolare pari all'angolo giro 2π, percorso in un tempo pari al periodo T, e scrivere:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{12.12}$$

Ricordando poi il legame tra periodo T e frequenza f, è facile convincersi che l'espressione precedente è equivalente alla seguente:

$$\omega = 2\pi f \tag{12.13}$$

Sapendo infine che la *velocità tangenziale* è definita come:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \tag{12.14}$$

al confronto tra le equazioni (12.12) e (12.14), risulta evidente il legame tra velocità tangenziale e angolare:

$$v = \omega R \tag{12.15}$$

Abbiamo ora tutti gli strumenti necessari per dedurre la **legge oraria del moto circolare uniforme**. Riscrivendo la definizione di velocità angolare espressa dall'equazione (12.11), è immediato ottenere:

$$\omega = \frac{\theta_{fin} - \theta_0}{t} \qquad \longrightarrow \qquad \omega t = \theta_{fin} - \theta_0$$

$$\theta_{fin} = \omega t + \theta_0 \tag{12.16}$$

E' importante notare come l'espressione finale (12.16) sia formalmente analoga alla legge oraria del moto rettilineo uniforme qualora si sostituiscano le grandezze lineari (spazio S e velocità v) alle variabili angolari (posizione θ e velocità ω).

12.6 L'accelerazione centripeta

In un moto circolare uniforme il **vettore velocità v** cambia direzione in ogni istante. Ciò causa la presenza inevitabile di una accelerazione che, però, non altera il modulo della velocità (il moto è *uniforme*) ma solo la sua direzione. Dimostriamo ora che:

1) il vettore accelerazione è *diretto in ogni istante verso il centro della circonferenza,* da cui il nome di **accelerazione "centripeta"** (dal latino *"centrum petere"*= dirigersi verso il centro)

2) il modulo dell'accelerazione centripeta vale:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} \qquad \text{oppure} \qquad a_{cp} = \omega^2 R$$

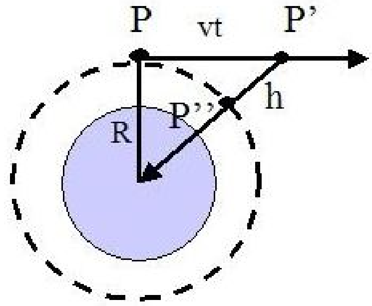


Figura 12.7: *Moto di un satellite in orbita attorno alla Terra e deduzione dell'accelerazione centripeta.*

Per dimostrare quest'ultima affermazione, prendiamo come esempio il moto di un satellite che orbita attorno alla Terra con velocità v ad una distanza R dal centro del pianeta.

Sia P la sua posizione iniziale: supponendo per semplicità l'orbita circolare, dopo un (breve) intervallo di tempo $\triangle t$ il satellite si troverà nella posizione P", ma sempre a distanza R dal centro della Terra. Potremmo dire che il corpo non si è avvicinato al suolo perché, essendo "in orbita" lontano da Terra, su di esso non agisce l'accelerazione di gravità terrestre. In realtà, una distanza dal suolo di qualche centinaio di km (che è la quota a cui orbitano molti satelliti) fa diminuire di pochissimo il valore di g. A 200 km di quota, ad esempio, abbiamo un valore che è ancora il 94% del valore misurato al suolo.

Il satellite *sta quindi cadendo verso il centro della Terra muovendosi di moto accelerato, ma la sua velocità tangenziale lo sposta contemporaneamente verso l'alto (rispetto al suolo terrestre) di una quota pari allo spazio di caduta.*

Dimostriamo l'affermazione precedente utilizzando ancora una volta il *principio di indipendenza dei moti simultanei.* Consideriamo la figura 12.7: il satellite si trova inizialmente nel punto P, dove risente di una velocità iniziale (tangente all'orbita) di modulo "v" e di una accelerazione diretta verso il centro della Terra a = g. Dopo un (breve) istante di tempo $\triangle t$ si ritrova nel punto P" dell'orbita.

Analizziamo il suo moto suddividendolo in due parti successive: quella tangente a velocità costante "v" che porta il corpo nel punto P' (allontanandolo da Terra), e quella in caduta libera con accelerazione diretta verso il centro della Terra che sposta il satellite da P' al punto P" (riportandolo di nuovo sull'orbita).

Siano $S = vt$ la lunghezza del primo tratto PP' e h la lunghezza di questo secondo spostamento P'P".

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PP'O, dove O sia il centro della Terra.

$$(R + h)^2 = R^2 + (vt)^2$$

$$R^2 + h^2 + 2Rh = R^2 + v^2t^2$$

$$h^2 + 2Rh = v^2t^2$$

$$h(h + 2R) = v^2t^2$$

Se si considera un intervallo di tempo $\triangle t$ molto piccolo, la quantità "h" in parentesi è molto

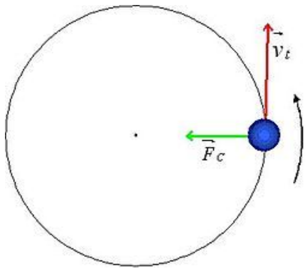


Figura 12.8: *L'accelerazione centripeta è sempre diretta verso il centro della curva ed ha direzione perpendicolare al vettore velocità.*

minore di $2R$ e può essere trascurata senza causare nessun errore. Abbiamo così:

$$h(2R) = v^2t^2$$

$$h = \frac{v^2t^2}{2R} = \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{R}\right)t^2$$

Come volevasi dimostrare, questa è l'equazione di un moto uniformemente accelerato con accelerazione diretta verso il centro della Terra (quindi "centripeta"), il cui modulo è dato da:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} \tag{12.17}$$

12.7 Moto circolare uniformemente accelerato

La trattazione del **moto circolare uniformemente accelerato** non prevede concetti e metodi nuovi rispetto a quanto detto in precedenza a proposito del moto rettilineo con accelerazione costante.

La differenza più importante è che ora, però, abbiamo una variazione del modulo della velocità angolare che è causata dalla presenza di una accelerazione angolare α. Di conseguenza varia anche il modulo della velocità tangenziale v.

Ovviamente sarà necessario trasformare le grandezze lineari in circolari: lo spazio percorso S (oppure x, misurato in metri) deve essere sostituito dallo spostamento angolare θ; la velocità lineare lascia il posto alla velocità angolare $\omega = \dfrac{\triangle\theta}{\triangle t}$(misurata in *rad/s*); infine, l'accelerazione da considerare in questo tipo di moto sarà l'accelerazione angolare $\alpha = \dfrac{\triangle\omega}{\triangle t}$ (in *rad/s*^{2}).

Avremo quindi le seguenti equazioni:

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega t + \theta_0$$

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\theta.$$

Lo studente presti attenzione a con confondere l'accelerazione angolare con quella centripeta: quest'ultima ha solo l'effetto di cambiare la direzione del vettore velocità, non il suo modulo, e continua ad essere espressa come di consueto:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R}$$

L'unica differenza è che ora anche tale valore, dipendendo dalla velocità tangenziale v, cambia istante dopo istante.

12.8 Il moto armonico

Esistono particolari tipi di moto periodico che presentano nella loro descrizione matematica un grado di difficoltà maggiore rispetto a quelli visti in precedenza anche se, come vedremo, sono deducibili dal moto circolare uniforme.

Consideriamo, ad esempio, l'oscillazione di un pendolo o di un sistema massa-molla: una volta che questi sistemi fisici sono spostati dalla loro posizone di equilibrio, iniziano un moto periodico dove la velocità e l'accelerazione continuano a cambiare istante dopo istante. Agli estremi dello spostamento vi sono addirittura dei punti di inversione: la velocità è per un istante nulla, ma poi cambia improvvisamente il suo verso di 180°.

Poichè l'analisi cinematica che andiamo a proporre fa uso delle funzioni goniometriche $sen(x)$ e $cos(x)$, che in matematica si chiamano anche *funzioni armoniche*, questa particolare tipologia di moto prende il nome di *moto armonico.*

Consideriamo ora un punto P che si sposta con velocità angolare costante ω lungo una circonferenza di raggio R. La sua posizione, istante per istante, è data dall'angolo al centro θ (misurato in radianti) che è legato alla velocità angolare dalla nota legge oraria $\theta = \omega t$. Tracciamo la perpendicolare dal punto P all'asse della ascisse e chiamiamo Q il piede di tale perpendicolare. Allo spostarsi del punto P sulla circonferenza, il punto Q (che rappresnta una specie di "ombra" di P sull'asse delle ascisse) si muove sul diametro della circonferenza avanti e indietro con velocità continuamente variabile e che, come abbiamo già detto, presenta agli estremi dello spostamento dei punti di inversione: infatti, se chiamiamo A e B gli estremi del diametro di centro O, il punto Q parte da fermo in B, ma poi aumenterà la sua velocità spostandosi verso O (pensiamo al moto di un pendolo). Oltrepassato O, la sua velocità inizierà a ridursi fino a che avrà raggiunto il punto A, dove, dopo essersi fermato per un istante, tornerà di nuovo a dirigersi verso B, accelerando nella prima parte del percorso e frenando in quella successiva.

La legge oraria di Q è ottenuta semplicemente scomponendo il raggio R sul diametro:

$$x = Rcos(\theta) = Rcos(\omega t) \tag{12.18}$$

Per ricavare la velocità e l'accelerazione facciamo riferimento alle figure (12.10).

Il vettore velocità tangenziale è in ogni punto tangente alla traiettoria. Se lo scomponiamo su una direzione parallela all'asse delle ascisse, essendo $\theta_1 = \theta$ perchè angoli alterni interni, otteniamo:

$$v_x = -vcos(90 - \theta_1) = -vsen(\theta) \tag{12.19}$$

Il segno negativo è motivato dal fatto che il vettore è diretto verso le ascisse negative. Questa espressione fornisce anche il valore della **velocità** della proiezione Q del punto in moto (armonico) lungo il diametro della circonferenza. Ricordando poi il legame tra velocità tangenziale e velocità angolare

$$v = \omega R$$

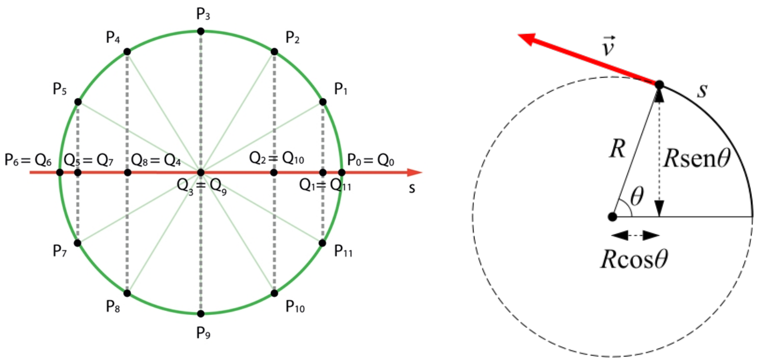


Figura 12.9: *Mentre il punto P si muove sulla circonferenza a velocità angolare costante, la sua proiezione Q si sposta a velocità variabile lungo il diametro (a sinistra). La proiezione del moto di P sull'asse delle ascisse vale* $x = R\,cos\vartheta$ *(a destra).*

la formula (12.19) può essere riscritta nel modo seguente:

$$v_x = -\omega Rsen(\theta) = -\omega Rsen(\omega t) \tag{12.20}$$

Per ricavare **l'accelerazione** del moto armonico dobbiamo ancora fare riferimento alla figura precedente.

In un moto circolare uniforme l'unica accelerazione presente è quella centripeta, diretta verso il centro della circonferenza, e di modulo:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \tag{12.21}$$

Scomponendola in direzione parallela all'asse delle ascisse, è immediato scrivere l'accelerazione a cui è sottoposto il punto Q:

$$a_x = a_{cp}\,cos(\theta) = -\omega^2 R\,cos(\omega t) \tag{12.22}$$

Si noti ora che, essendo $x = R\,cos(\omega t)$, la formula (12.22) diventa:

$$a_x = -\omega^2 x \tag{12.23}$$

In un moto armonico, quindi, l'accelerazione non è uniforme, costante, ma dipende dalla posizione x *del corpo in moto.*

Siamo in presenza, quindi, di un caso molto particolare rispetto a quelli visti in precedenza.

Osserviamo ora come il percorso algebrico che ci ha portato alla deduzione delle equazioni sopra elencate abbia preso spunto dall'analisi del moto circolare uniforme di un punto P su di una circonferenza.

E' sicuramente vero, però, che quando si studia un pendolo o le oscillazioni di una molla e di oggetti elastici posti in vibrazione, non c'è traccia di nessuna circonferenza. Per questo motivo, si preferisce chiamare la grandezza

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

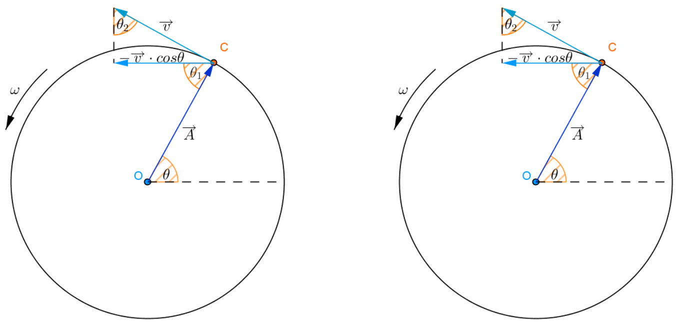
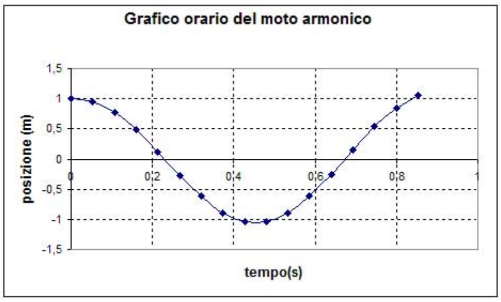


Figura 12.10: *Deduzione della velocità e dell'accelerazione in un moto armonico.*



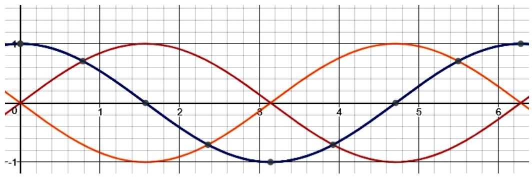


Figura 12.11: *Grafico orario del moto armonico: spostamento dalla posizione di equilibrio in funzione del tempo (a sinistra). Grafici orari sovrapposti rappresentanti lo spostamento, la velocità e l'accelerazione in un moto armonico (a destra).*

pulsazione e non più **velocità angolare**.

E' poi utile svincolarsi dalla componente x presente nelle equazioni di moto e riscrivere le precedenti formule in modo più generale, come proposto di seguito, dove si è anche sostituito al raggio R una più generica ampiezza di oscillazione A:

$$x = A\,cos(\omega t) \tag{12.24}$$

$$v = -\omega A\,sen(\omega t) \tag{12.25}$$

$$a = -\omega^2 A\,cos(\omega t) \tag{12.26}$$

$$a_x = -\omega^2 x \tag{12.27}$$

I grafici orari di queste leggi orarie dipendono esclusivamente dalle funzioni goniometriche $sen(x)$,$cos(x)$, e per questo motivo non presentano particolari difficoltà per essere rappresentati.

Nell'ultima figura sono disegnate le curve dello spostamento, della velocità e dell'accelerazione sovrapposte nello stesso piano cartesiano. Lo studente saprebbe distinguerle?? (Un suggerimento: si pensi al moto di un pendolo che oscilla da A a B. Quando si trova nel punto A il suo spostamento dalla posizione centrale di equilibrio è massimo, la velocità nulla .....)