Capitolo 14

Lavoro ed energia

14.1 Il prodotto scalare

Dati due vettori $\overrightarrow{A}$ e $\overrightarrow{B}$ si chiama *prodotto scalare* il numero C definito dal prodotto dei loro moduli per il coseno dell'angolo θ compreso tra le direzioni dei due vettori:

$$C = A \cdot B \cdot cos(\theta) \tag{14.1}$$

In formule:

$$C = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} \tag{14.2}$$

Si noti come il prodotto scalare sia nullo, oltre al caso banale di vettori di modulo uguale a zero, anche quando le direzioni di $\overrightarrow{A}$ e di $\overrightarrow{B}$ sono perpendicolari.

L'aggettivo "scalare" fa riferimento al risultato dell'operazione che è un valore numerico (quindi "scalare") nonostante i due fattori del prodotto siano entrambi dei vettori.

14.2 Il lavoro di una forza

Il concetto di *lavoro* è uno dei più importanti in fisica. Il suo significato è completamente diverso da quello che il linguaggio quotidiano attribuisce solitamente a tale termine. In fisica, infatti, il lavoro viene compiuto dalle forze quando esse eseguono uno spostamento $\Delta\overrightarrow{s}$ del loro punto di applicazione. Più precisamente, *il* **lavoro** *è definito come il prodotto scalare di una forza per lo spostamento.* In simboli:

$$L = \overrightarrow{F} \cdot \Delta\overrightarrow{s} \tag{14.3}$$

oppure, in modo analogo, usando solo i moduli

$$L = F \cdot \Delta s \cdot cos(\theta) \tag{14.4}$$

Notiamo, inoltre, come $F \cdot cos(\theta)$ sia la componente di $\overrightarrow{F}$ lungo la direzione di moto, per cui possiamo concludere che la scrittura precedente equivale a

$$L = F_{||} \cdot \Delta s \tag{14.5}$$

L'unità di misura è il $newton \cdot metro$ a cui viene dato nome di *joule*: $1J = 1N \cdot 1m$

Se il segno algebrico del lavoro è positivo, si parla di **lavoro motore**, nel senso che la forza applicata è la causa dello spostamento. Se il segno è negativo, si dice che siamo in presenza di **lavoro resistente**, intendendo con ciò che la causa dello spostamento del corpo studiato è da ricercare in una forza esterna a cui quella di cui si è calcolato il lavoro.

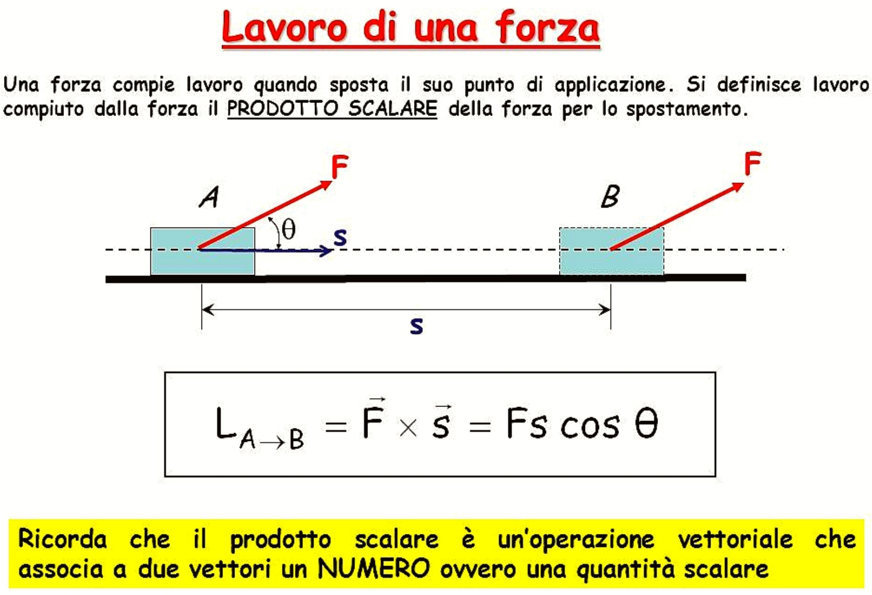

Figura 14.1: *Definizione di lavoro*

14.3 Interpretazione grafica del lavoro

E' importante precisare che la definizione di lavoro (14.3) enunciata nel paragrafo precedente può essere usata solo quando:

1. lo spostamento $\Delta \overrightarrow{s}$ è *rettilineo*
2. la forza $\overrightarrow{F}$ rimane *costante* durante lo spostamento

Vediamo ora come regolarci nel caso in cui queste due condizioni non siano soddisfatte.

A tal fine consideriamo una forza costante di modulo F che sia, per semplicità, parallela allo spostamento rettilineo $\overline{AB}$: ponendo le due grandezze in un piano cartesiano, si ottiene il grafico di una retta orizzontale ristretta all'intervallo Δs considerato. E' immediato verificare che la misura dell'**area** della parte di piano compresa tra la curva e l'asse delle ascisse vale

$F \cdot \Delta s$. Ma tale valore è equivalente al lavoro della forza $\overrightarrow{F}$ considerata. Siamo così autorizzati a scrivere:

$$Lavoro \equiv Area$$

Le unità di misura con cui esprimere quest'area non sono m^2, come ci si potrebbe aspettare, bensì

$$Area = base \cdot altezza = newton \cdot metri = joule.$$

E ciò prova a maggior ragione la correttezza dell'**interpretazione grafica del lavoro** di una forza.

Questo modo di procedere può essere generalizzato e si può dimostrare che continua a valere anche nel caso di forze NON costanti e spostamenti NON rettilinei. Le forze elastiche, ad esempio, cambiano di valore man mano che la molla si deforma: esse seguono la legge di Hooke, che ricordiamo essere

$$F_{el} = k\,\Delta l.$$

Ora, poiché il calcolo del lavoro compiuto da una forza elastica nell'estensione di una molla non rispetta le due ipotesi di partenza, non può essere eseguito con la (14.3) nè con gli strumenti algebrici in nostro possesso, l'unica possibilità per pervenire al risultato è di utilizzare l'interpretazione grafica. Vediamo come.

In un grafico cartesiano la legge di Hooke è rappresentata da una retta passante per l'origine e di coefficiente angolare k. L'area tra la retta e l'asse delle ascisse è quella di un triangolo rettangolo, di cateti $k\,\Delta l$ e Δl. Essendo, come è noto, $Area = \frac{1}{2} base \cdot altezza$ possiamo concludere:

$$L_{el} = \frac{1}{2} k\,\Delta l^2 \tag{14.6}$$

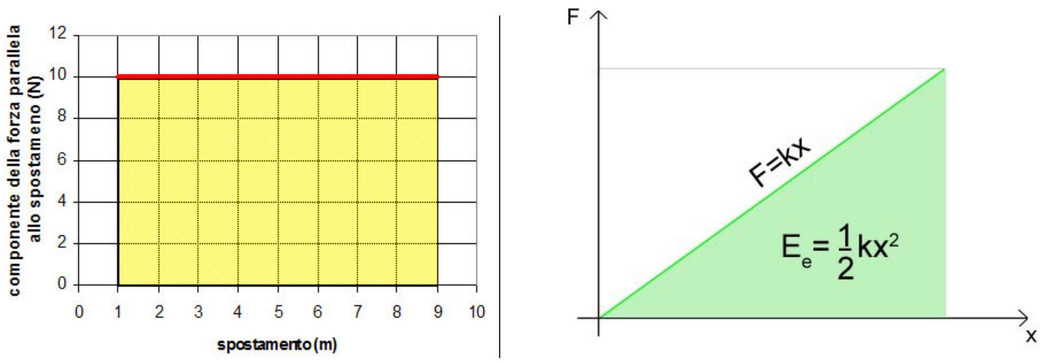

Figura 14.2: *Interpretazione grafica del lavoro: forza costante (a sinistra) e forza elastica (a destra). L'area colorata corrisponde al lavoro della forza e anche all'energia E_e utilizzata per compiere tale lavoro.*

In tutti gli altri casi in cui l'area da determinare non è quella di una figura elementare, il metodo grafico rimane valido di principio, a condizione di riuscire ad eseguire i calcoli; ciò consente, però, di estendere il metodo a percorsi di forma qualunque, non necessariamente rettilinei, e a forze variabili in modo anche complesso.

In questi casi il calcolo dell'area interessata, che ha la forma di un trapezoide, deve essere suddivisa idealmente in una serie elevatissima, al limite infinita, di tratti estremamente piccoli, di lunghezza poco più che nulla. All'interno di questi brevi intervalli, la forma della spostamento può essere approssimata da un segmento rettilineo e la forza può essere considerata ragionevolmente costante. Ricadiamo, così, nel range di validità della definizione di lavoro, mentre, dal punto di vista grafico, abbiamo ottenuto una infinità di rettangoli infinitesimi per ognuno dei quali il calcolo dell'area, almeno in linea di principio, non dà problemi.

Nella realtà, invece, la somma di infinite quantità infinitesime richiede l'uso di strumenti matematici che non sono ancora in nostro possesso e che fanno parte del cosiddetto *calcolo integrale.* La soluzione del problema, quindi, esiste, ma verrà presentata all'ultimo anno di corso.

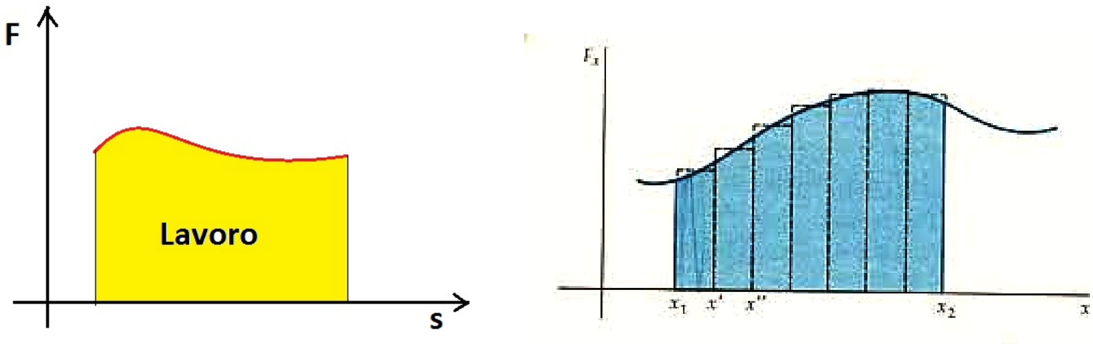

Figura 14.3: *Interpretazione grafica del lavoro nel caso di una forza variabile (a sinistra). In questo caso, l'area del trapezoide viene suddivisa in una infinità di piccoli rettangoli all'interno dei quali la forza possa essere considerata costante e lo spostamento rettilineo. Il lavoro si ottiene con gli strumenti matematici del calcolo integrale (a destra).*

14.4 Energia e potenza

Una delle grandezze fisiche più importanti della fisica, e nello stesso tempo più profonde, è **l'energia**. Essa assume diverse forme: parliamo, infatti, di energia meccanica, elettrica, nucleare, eolica, termica, chimica, elettromagnetica, atomica..... Potremmo aggiungerne molte altre, ma vedremo più avanti che esse sono tutte legate da un preciso denominatore comune.

Possiamo comunque dare la seguente definizione: *un sistema possiede* **energia** *quando è in grado di compiere lavoro.*

In questo modo abbiamo collegato il concetto di energia a quello di lavoro, in quanto l'esperienza dimostra che sono due aspetti della stessa realtà fisica, due facce della stessa medaglia. Non può stupire, allora, se anche l'energia si misuri in *joule.*

Definiamo ora la **potenza** come *la rapidità con cui un sistema fisico è in grado di eseguire un dato lavoro* (oppure di utilizzare una data energia).

Ad esempio: sia il motore di una Ferrari che quello di una Cinquecento sono in grado di accelerare la vettura da 0 km/h a 100 km/h, ma il tempo richiesto per ottenere tale risultato è molto diverso !! Questa caratteristica che contraddistingue in modo netto i due motori si dice *potenza* P, ed è definita algebricamente come *l'energia (il lavoro) spesa dal sistema* *meccanico nell'unità di tempo.* In simboli:

$$P = \frac{E}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta t} \tag{14.7}$$

L'unità di misura è il *watt*. Vale la seguente equivalenza: $1\,W = \frac{1J}{1s}$.

Un metodo alternativo per esprimere la potenza di un sistema meccanico, introducendo la velocità, è il seguente:

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{F_{||}\,\Delta s}{\Delta t} = F_{||}\,v \tag{14.8}$$

14.5 Il teorema dell'energia cinetica

Consideriamo ora un corpo di massa m situato su un piano orizzontale senza attrito e su cui venga applicata una forza parallela di moduo F. Il corpo inizierà a muoversi di moto rettilineo uniformemente accelerato con $a = \frac{F}{m}$.

Nella spiegazione che segue, useremo la definizione di accelerazione $a = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$ e la proprietà, tipica dei soli moti rettilinei uniformemente accelerati, per cui la velocità media può essere espressa nel modo seguente: $v_m = \frac{1}{2}(v_i + v_f)$.

A partire dalla definizione di lavoro, valgono allora le seguenti uguaglianze:

$$L = F\,\Delta s = ma\,\Delta s = m\frac{(v_f - v_i)}{\Delta t}\Delta s = m(v_f - v_i)\,v_m =$$

$$= m(v_f - vi)\,\frac{1}{2}(v_f + v_i) = \frac{1}{2}m(v_f - v_i)(v_f + v_i) = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$

In conclusione:

$$L = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \tag{14.9}$$

Per capire il significato fisico dei due termini $\frac{1}{2}mv^2$ osserviamo che essi devono essere espressi con la stessa unità di misura del lavoro, il *joule*; somme, differenze ed uguaglianze, infatti, si possono calcolare solo per grandezze omogenee. Ed essendo il *joule* l'unità di misura dell'energia, l'espressione $\frac{1}{2}mv^2$ è necessariamente una forma di energia che dipende dalla massa del corpo in moto ma, soprattutto, dalla sua velocità (per la presenza del termine al quadrato).

Per questo motivo, è ragionevole chiamare **energia cinetica** K la quantità:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{14.10}$$

per cui la (14.9) diventa

$$L = K_f - K_i \tag{14.11}$$

$$L = \Delta K \tag{14.12}$$

L'espressione (14.12) prende il nome di **Teorema dell'energia cinetica.**

14.6 Il lavoro della forza peso

Consideriamo un corpo di massa m posto nel punto A, ad una quota h_1 dal terreno. Lasciamolo libero di muoversi e analizziamo il lavoro fatto dalla forza peso per spostarlo fino ad un punto B, posto sulla verticale di A, ma ad una quota inferiore h_2. L'angolo tra la forza peso e lo spostamento $\overrightarrow{AB}$ è nullo, perchè i due vettori hanno la stessa direzione, per cui vale $cos(0) = 1$. Usando la definizione (14.3), calcoliamo ora il lavoro della forza peso per spostare il corpo da A a B (figura 14.4). Posto il modulo di $\overrightarrow{AB}$ uguale a h, possiamo scrivere:

$$L_{AB} = P \cdot AB \cdot cos(0) = mgh.$$

Siamo in presenza di un *lavoro motore*, perchè il risultato è positivo: è proprio la forza peso a spostare il corpo da A a B.

Eseguiamo ora lo spostamento contrario, cioè da B ad A. Il vettore spostamento e il peso sono ora opposti e l'angolo θ che si forma tra le due direzioni è di 180°, per cui cos(180°)=-1. Si ha:

$$L_{BA} = P \cdot AB \cdot cos(180°) = -mgh$$

In questo caso il *lavoro è resistente*, perchè negativo. Il significato di questa affermazione risiede nel fatto che deve essere una forza esterna la causa dello spostamento del corpo dalla quota B ad una quota maggiore A, mentre il ruolo assunto dalla forza peso è quello di opporsi, come è logico, a tale aumento di quota.

Scegliamo ora due punti A e B che non siano più sulla verticale, ma disposti come in figura (14.4). Valutiamo il lavoro della forza peso lungo percorsi diversi: AB, ACB, ADB. Scopriremo, forse un po' sorprendentememnte, che si perviene sempre allo stesso risultato.

Analizziamo i tre casi separatamente:

1. Percorso ACB.

   $$L_{ACB} = L_{AC} + L_{CB} = mg \cdot AC \cdot cos(90°) + mg \cdot CB \cdot cos(0°) =$$
   $$= 0 + mg \cdot CB \cdot 1 = mg \cdot CB$$

2. Percorso ADB

   $$L_{ADB} = L_{AD} + L_{DB} = mg \cdot AD \cdot cos(0°) + mg \cdot DB \cdot cos(90°) = mg \cdot AD \cdot 1 + 0 =$$
   $$= mg \cdot AD = mg \cdot CB$$

   I lavori sui due percorsi sono uguali: nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato l'ovvia uguaglianza tra AD e CB, in quanto lati opposti di un rettangolo.

3. Percorso AB

   $$L_{AB} = mg \cdot AB \cdot cos(\theta) = mg \cdot CB$$

   Il risultato, anche in questo caso, non cambia. Nell'ultimo passaggio è stato utilizzato il teorema dei triangoli rettangoli, per il quale un cateto è sempre uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente. Nel nostro caso, $CB = AB \cdot cos(\theta)$.

Abbiamo così dimostrato le notevoli proprietà:

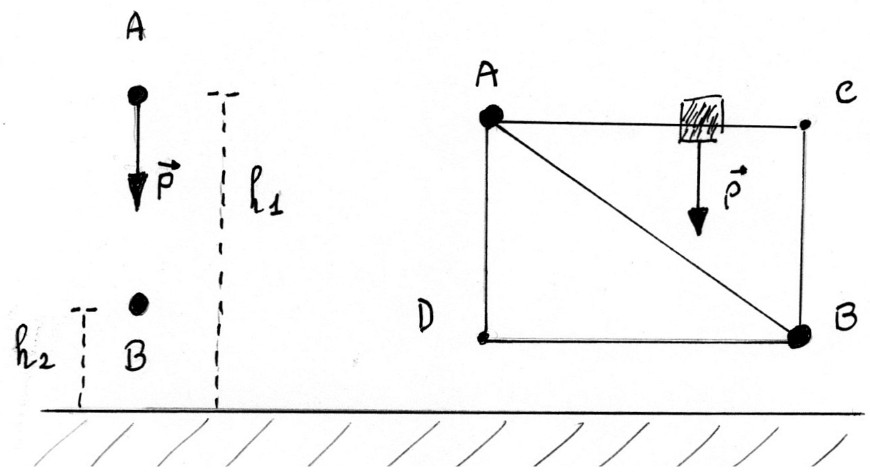

Figura 14.4: *Il lavoro della forza peso non dipende dal percorso AB ma solo dalla posizione iniziale e finale. Le forze per cui vale questa proprietà si dicono "conservative".*

- il lavoro della forza peso per spostare un corpo da A a B *non dipende dal percorso effettuato, ma solo dalla differenza di quota* $\Delta h = CB$ tra il punto iniziale e quello finale.
- il lavoro della forza peso *lungo ogni percorso chiuso* γ *(dove, cioè, i punti A e B coincidono) è sempre nullo.*

Le forze che soddisfano queste caratteristiche sono pochissime e si chiamano f**orze conservative**: tra quelle che già conosciamo, ci sono solo la forza peso e la forza elastica. L'importantissima proprietà che le contraddistingue è quella di conservare l'energia meccanica durante le trasformazioni a cui il sistema fisico studiato va incontro. A tale proposito, si evidenzia questa notevole caratteristica dicendo che esse soddisfano il **Principio di conservazione dell'energia**, che affronteremo tra breve.

Le altre forze si dicono **dissipative:** tra queste, il prototipo è senza dubbio la forza d'attrito.

14.7 Lavoro ed energia potenziale

Un corpo posto sul terreno, fermo, lasciato libero di muoversi, non si muove. Poiché sappiamo che il movimento presuppone la liberazione di energia cinetica, possiamo pensare che in tale situazione il corpo non abbia energia da spendere.

Lo stesso oggetto, portato ad una quota h e lasciato libero di muoversi, inizia a cadere verso il basso con una velocità sempre maggiore. Sembra dunque che l'oggetto, in questa seconda situazione, sia dotato di energia e che, proprio per questo motivo, possa trasformarla in energia cinetica. Poichè questa energia, posseduta dall'oggetto in virtù della nuova posizione ora occupata, non si manifesta fino a quando il corpo viene messo nella condizione di muoversi, ci si riferisce ad essa con il nome di **energia potenziale**.

Da dove arriva l'energia potenziale?

E' ragionevole pensare che essa sia stata fornita al corpo dal lavoro compiuto dalla **forza esterna** che è servita per spostare l'oggetto nella posizione voluta. Poichè la forza esterna deve essere almeno uguale e contraria alla forza peso, il lavoro da essa sviluppato è pure uguale, ma di segno opposo, a quello della forza peso. Avremo quindi, per spostare a velocità costante un corpo di massa m dal terreno fino al punto P, posto ad una quota h, un lavoro dato da:

$$L_{est} = -L_{peso} = mgh \tag{14.13}$$

Definiamo **energia potenziale gravitazionale** U *il lavoro delle forze esterne per portare il corpo studiato da quota zero al punto P.* In formule:

$$U = mgh \tag{14.14}$$

Le seguenti osservazioni sono particolarmente importanti:

1. il livello del terreno, posto a quota 0, è contraddistinto da una energia potenziale nulla

2. ogni punto dello spazio attribuisce al corpo di massa m una energia potenziale che dipende principalmente dalla sua quota rispetto al terreno, $U = mgh$, e che corrisponde al lavoro di una forza esterna per portare il corpo in tale posizione. Come abbiamo visto, *tale lavoro è uguale e contrario a quello eseguito dalla forza peso*

3. poichè in precedenza abbiamo dimostrato che il lavoro della forza peso per spostare un corpo dal punto A al punto B non dipende dal percorso seguito ma solo dalla differenza Δh tra le due quote, ne segue che nel calcolo del lavoro posso sempre sostituire al prodotto scalare (che mi obbliga a considerare le direzioni tra i vettori, cosa non sempre agevole dal punto di vista dei calcoli) la differenza tra i valori delle energie potenziali (cambiate di segno) tra i due punti. In formule:

   $$L_{AB} = U_A - U_B \tag{14.15}$$

   oppure, in modo ancora più sintetico

   $$L_{AB} = -\Delta U \tag{14.16}$$

   Il vantaggio del calcolo algebrico rispetto a quello vettoriale è notevole, e non necessita altri commenti. Si ricordi solo che tale notevole proprietà è soddisfatta solo dalle forze conservative, quindi, per ora, solo dalla forza elastica e dalla forza peso, per le quali bisogna anche ricordare che il lavoro su un percorso chiuso γ è nullo. Per tale motivo

   $$L_{AB} = 0 = -\Delta U = U_A - U_B \tag{14.17}$$

   Si conclude che $U_A = U_B$ per ogni percorso chiuso γ. Il ché è ragionevole, pensando che i punti A e B, in questo caso, coincidono.

4. Aggiungiamo, omettendone la dimostrazione, che per le forze elastiche l'energia potenziale è data dalla seguente espressione:

   $$U_{el} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 \tag{14.18}$$

14.8 La conservazione dell'energia

L'energia si presenta ai nostri occhi sotto molti aspetti, ma nel corso dell'Ottocento i fisici si sono convinti che tutte queste forme possono essere ricondotte a due sole situazioni:

1. l'energia che dipende dalla velocità, a cui è stato dato nome di **energia cinetica**
2. l'energia che dipende dalla posizione dei corpi, detta **energia potenziale.**

Per tutti i sistemi meccanici sottoposti a forze conservative (per cui esiste, quindi, l'energia potenziale), possiamo definire energia totale del sistema la seguente quantità:

$$E_{tot} = U + K \tag{14.19}$$

Dimostriamo ora che, qualunque siano le trasformazioni a cui può andare incontro il sistema fisico, fin tanto che le uniche forze a cui è sottoposto sono di questo tipo, *il valore dell'energia totale si conserva.*

Riprendendo le equazioni (14.12) e (14.16):

$$L = \Delta K$$
$$L = -\Delta U$$

e sottraendo membro a membro

$$0 = \Delta K + \Delta U$$
$$0 = (K_f - K_i) + (U_f - U_i)$$
$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

Ricordando la formula (14.19), si arriva al **Principio di conservazione dell'energia:**

$$E_i = E_f \tag{14.20}$$

In un sistema fisico in movimento, quindi, il passaggio di energia dalla forma potenziale a quella cinetica può anche essere continuo, ma il valore totale non cambia e si conserva fino a quando non intervengano fenomeni dissipativi (attriti...).

Nota bene

In tutti i discorsi precedenti abbiamo considerato come punto zero dell'energia potenziale la posizione a quota nulla: diciamo, il pavimento del nostro laboratorio. Ma se il laboratorio non fosse al piano terra?? Cambia qualcosa nel calcolo del valore dell'energia potenziale del sitema studiato?

Ovviamente sì, ma la questione rappresenta un falso problema.

Infatti, come dicevamo in precedenza, il principio di conservazione dell'energia è uno strumento di grandissima comodità (e aggiungiamo di relativa semplicità) per lo studio di problemi anche molto complessi. Ma nel suo enunciato (14.20) non compare l'energia potenziale U, bensì solo la variazione di energia potenziale ΔU relativa al punto iniziale e finale della trasformazione meccanica studiata di volta in volta. Nel calcolo di ΔU non contano i singoli valori dell'energia potenziale, che possono anche variare se consideriamo il punto zero in modo a noi più comodo (il piano di un tavolo, l'estremità del filo di un pendolo...ad esempio), ma solo le differenze tra tali valori.

Ebbene, queste differenze, come è facilmente comprensibile, sono indipendenti dal punto scelto come origine per il calcolo di U. Possiamo così regolarci a nostro piacimento, in modo da semplificare i conti dell'energia potenziale.

Facciamo un esempio: un corpo di massa 1 kg è posto a 2 m da terra e a 1 m dal piano di un tavolino le cui gambe sono alte 1 m. La sua energia potenziale è di 19,8 J rispetto al terreno e di soli 9,8 J se riferita al piano del tavolo. Abbassiamo ora l'oggetto di 50 cm. La sua nuova posizione risulterà di 1,50 m da terra e di 0,50 m dal piano del tavolo: l'energia potenziale sarà diminuita rispettivamente a 14,7 J rispetto al terreno e a 4,9 J rispetto al tavolo.

I valori di U sono diversi, ma se vogliamo applicare la conservazione dell'energia dobbiamo calcolare ΔU tra la posizione iniziale e quella finale. Ebbene, qualunque sia il riferimento scelto, terreno o tavolino, il calcolo fornisce sempre lo stesso valore: $\Delta U = 9,8\,J$!!

Per questo motivo si è soliti dire che *l'energia potenziale è definita a meno di una costante arbitraria,* che poi nel valutare il termine ΔU sparisce. In simboli:

$$U = mgh + c$$

14.9 Generalizzazione del principio di conservazione

La maggior parte delle forze non soddisfa il principio di conservazione dell'energia. La più comune di queste è la forza d'attrito, il cui effetto è proprio quello di dissipare parte dell'energia del sistema sotto forma di calore.

Può anche accadere che il sistema fisico sia sottoposto a forze esterne che aggiungono energia al sistema: anche in questo caso il principio, così come l'abbiamo scritto in precedenza, non può essere usato.

E' però possibile riscriverne l'enunciato in modo da considerare il contibuto energetico anche di queste forze, siano esse dissipative oppure no. Se chiamiamo L_{est} il lavoro delle forze esterne al sistema (positivo o negativo che sia), il principio può ancora essere usato in una sua **forma generalizzata**, che è la seguente:

$$E_i + L_{est} = E_f \tag{14.21}$$