Capitolo 25

Il magnetismo

25.1 Notizie storiche

L'esistenza di forze di tipo magnetico é perfettamente nota fin dall'antichità. Le prime testimonianze scritte che ne accertano la conoscenza risalgono addirittura a Talete (VII sec. a.C.) il quale afferma che il magnete è "vivo" perchè in grado di far muovere alcuni oggetti (infatti attrae il ferro) e che, per questo motivo, ha un' "anima". La parola "magnete", inoltre, sembra che derivi dall'antica città di *Magnesia*, in Asia Minore, presso la quale venivano estratte rocce di **magnetite**, un particolare ossido del ferro (formula chimica Fe_3O_4). Plinio il Vecchio nella *Naturalis Historia* narra dello stupore del pastore cretese Magnes quando, usando un bastone con la punta di ferro, si accorge che può attrarre o respingere alcune pietre particolari.

Anche gli antichi Cinesi sono perfettamente a conoscenza delle proprietà degli aghi magnetici di orientarsi verso il Nord geografico, caratteristica che risultava estremamente utile alla navigazione in mare aperto. La tradizione attribuisce al navigatore amalfitano *Flavio Gioia* il merito di avere perfezionato la bussola e di averla introdotta definitivamente in Europa attorno all'anno 1300 anche se il primo tentativo di spiegarne il funzionamento viene compiuto solo nel 1600 da *William de Gilbert* che avanza l'ipotesi, in seguito rivelatasi corretta, che la Terra sia di fatto un gigantesco magnete naturale.

Lo studio del magnetismo, comunque, non compie reali progressi nei secoli seguenti e fino all'anno 1820 le sue cause continuano ad essere completamente sconosciute.

25.2 Magnetismo e correnti: l'esperimento di Ørsted

Nell'anno 1820 il fisico danese Jans Christian Ørsted (1777-1851), mentre sta preparando una lezione nel laboratorio della sua Università per illustrare agli studenti le poche conoscenze del tempo sui fenomeni elettrici e magnetici, sposta casualmente un ago magnetico ponendolo

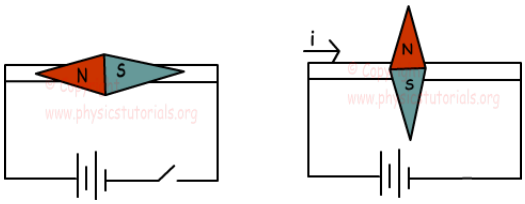

Figura 25.1: L'esperimento di Ørsted. Quando una corrente i scorre in un filo rettilineo, l'ago magnetico ruota su se stesso e si dispone in direzione perpendicolare.

vicino ad un filo percorso da corrente. Con grande sorpresa, Ørsted si accorge che l'ago inizia a muoversi e a ruotare di 90°, disponendosi lungo una direzione perpendicolare al filo stesso. Invertendo il verso della corrente, la rotazione avviene al contrario, ma sempre e comunque con l'esito finale di disporre l'ago magnetico perpendicolarmente alla corrente. Per contro, in assenza di corrente, l'ago non mostra nessun tipo di movimento.

Quello che Ørsted aveva appena scoperto poteva avere una sola spiegazione possibile: *un filo percorso da corrente si comporta come un magnete*, e può interferire con eventuali altri oggetti magnetizzati nelle vicinanze.

Un passo decisivo per comprendere l'origine del magnetismo era stato finalmente compiuto!

25.3 Magnetismo e correnti: l'esperimento di Ampère

Poche settimane dopo essere venuto a conoscenza dell'esperimento di Ørsted, il francese André-Marie Ampère (1775-1836) intuisce immediatamente che se un conduttore attraversato da corrente elettrica genera un campo magnetico, allora le forze prodotte possono interagire con altre correnti poste nelle vicinanze.

L'esperimento realizzato da Ampère consiste semplicemente nel collegare due fili conduttori a due diverse batterie per poi disporli molto vicini tra loro, lungo direzioni parallele. Ampère nota che se la corrente nei due fili ha la stessa direzione e lo stesso verso, tra i conduttori si esercita una forza di attrazione. Se le due correnti hanno invece verso opposto, l'interazione magnetica che si sviluppa tende ad allontanare i fili, respingendoli.

Il modulo della forza che ogni filo esercita su un tratto di lunghezza L dell'altro, è facilmente dedotto per via sperimentale e risulta:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1 i_2}{R}L \tag{25.1}$$

La formula precedente prende il nome di **legge di Ampère**, dove:

L è la lunghezza del tratto di due fili posti parallelamente uno all'altro

R è la distanza che li separa

i_1 e i_2 sono le correnti che attraversano i conduttori

μ_0 è la costante di permeabilità magnetica nel vuoto.

Se si prendono in esame materiali diversi, la costante va sostituita con $\mu = \mu_0\mu_r$, che rappresenta l'attitudine di una sostanza generica a lasciarsi magnetizzare più o meno facilmente. In questo caso, μ_r si chiama *costante di permeabilità magnetica del mezzo rispetto al vuoto.*

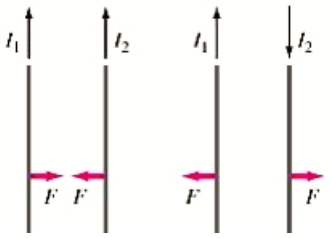

Figura 25.2: L'esperimemento di Ampère: due fili paralleli percorsi da correnti nello stesso verso si attraggono; se percorsi da correnti di verso opposto, si respingono.

Nel caso del vuoto, si ha: $\frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$

Con l'esperienza di Ampère diventa possibile definire l'unità di misura dell'intensità della corrente elettrica, l'***ampere,*** nel seguente modo:

l'ampère è l'intensità di corrente elettrica che, se mantenuta in due conduttori lineari paralleli di lunghezza infinita, posti a un metro di distanza l'uno dall'altro nel vuoto, produce tra questi una forza pari a $2 \cdot 10^{-7}$ N *per metro di lunghezza.*

Dall'*ampère* deriva l'unità di misura della carica elettrica, il ***coulomb***, definito come

la quantità di carica che passa in un secondo attraverso una sezione di un conduttore percorso da una corrente di un ampère.

25.4 Magnetismo e correnti: l'esperimento di Faraday

Nel 1821, un anno dopo che Ørsted aveva dimostrato come una corrente può esercitare una forza su di un magnete, il fisico britannico Michel Faraday (1791-1867) si chiede se è possibile evidenziare il fenomeno simmetrico, in virtù del quale, cioé*, un magnete riesca ad imprimere una forza su un conduttore attraversato da corrente elettrica.*

L'esperimento realizzato da Faraday prevede una strumentazione molto semplice: un filo conduttore collegato ad una batteria e fatto passare tra i due poli di una calamita a ferro di cavallo. Quando la corrente attraversa il filo, Faraday nota che su di esso agisce una forza improvvisa che lo sposta dalla sua posizione iniziale. Applicando al filo una intelaiatura di sostegno collegata ad un dinamometro, diventa così possibile misurare in modo sufficientemente preciso l'intensità e il verso della forza magnetica in gioco.

Il modulo di tale forza risulta essere:

$$F = Bil \sin(\alpha) \tag{25.2}$$

dove α è l'angolo tra la direzione della corrente i (in pratica la direzione del filo conduttore rettilineo) e quella del campo magnetico B, mentre il verso e la direzione della forza **F** viene descritta dalla cosiddetta ***regola della mano destra***: disponendo le prime tre dita della mano destra perpendicolarmente le une rispetto alle altre, *il pollice indica il verso della corrente i, l'indice la direzione del campo magnetico B e il medio il verso della forza F che fa muovere il filo.*

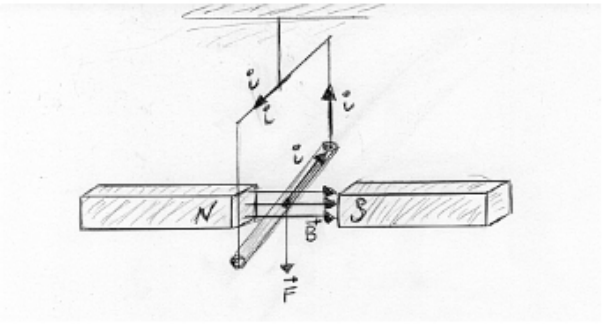

Figura 25.3: *L'esperimento di Faraday*

In modo più sintetico, la forza magnetica **F** può essere espressa dal seguente prodotto vettoriale:[1]

$$\overrightarrow{F} = i\,\overrightarrow{l} \times \overrightarrow{B} \tag{25.3}$$

Più in generale, possiamo affermare che un qualunque filo persorso da corrente $\overrightarrow{i}$ posto in un campo magnetico $\overrightarrow{B}$ risente di una forza data dalla formula (25.2).

Con questo esperimento Faraday completa l'analisi delle interazioni reciproche tra correnti e campi magnetici: un filo percorso da corrente, quindi, non genera una forza solo nei confronti di conduttori analoghi attraversati da corrente elettrica, ma anche rispetto a dei magneti di forma e dimensione qualunque.

L'espressione (25.3) consente di definire l'unità di misura del campo magnetico, il ***Tesla***[2], come

l'intensità di un campo magnetico B che esercita la forza di 1 N su di un conduttore rettilineo lungo 1 m attraversato da una corrente di 1 A, quando il conduttore è disposto perpendicolarmente al campo magnetico (dalla formula $B = \frac{F}{iL}$).

25.5 Descrizione del campo magnetico

La descrizione formale delle forze magnetiche sembra ripresentare tutti i problemi teorici già affrontati nel caso delle forze elettrostatiche. Anche per il magnetismo, cioè, si ha l'impressione di avere a che fare con una forza che agisce *a distanza* e non *a contatto*, con molte analogie rispetto al caso dell'elettrostatica, anche se con alcune sostanziali differenze:

1. definiamo *campo magnetico* ***B*** quel particolare spazio in cui, punto per punto, è possibile misurare il modulo e la direzione della forza magnetica
2. le sorgenti del campo magnetico vengono chiamate *polo Nord* e *polo Sud*: poli dello stesso tipo si respingono, mentre poli di tipo opposto si attirano, ma, diversamente dal

[1] Dati i due vettori $\overrightarrow{B}$ e $\overrightarrow{C}$ si definisce prodotto vettoriale $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}$ il vettore $\overrightarrow{A}$ di modulo $A = B \cdot C \cdot sen(\alpha)$, dove α é l'angolo tra le direzioni di $\overrightarrow{B}$ e di $\overrightarrow{C}$. La direzione e il verso di $\overrightarrow{A}$ sono stabiliti dalla *regola della mano destra.*

[2] *Nikola Tesla (1856-1943), inventore, ingegnere e fisico serbo naturalizzato statunitense, ha fornito numerosi e geniali contributi all'elettromagnetismo, tra i quali le teorie che hanno portato alla realizzazione dei moderni motori in corrente alternata.*

caso elettrico in cui dove possono esistere separatamente la singola carica positiva o negativa, il polo Nord e il polo Sud sono inseparabili: dividendo un magnete in due parti, su ognuna di esse si vengono a ricreare immediatamente entrambi i poli. Questa proprietà può essere sintetizzata dalla seguente affermazione: *in natura non esistono monopoli magnetici*[3]

3. spargendo della limatura di ferro su un foglio di carta posto nei pressi di un magnete (o di un filo percorso da corrente), si può notare come le piccole particelle ferrose si orientino in modo ordinato a formare delle linee che uniscono i due poli. Questo fenomeno, in analogia con il caso elettrostatico, consente di descrivere alcune proprietà del campo magnetico ricorrendo all'espediente grafico delle linee di forza. Si ricordi al proposito come, in ogni punto della linea di forza, *la direzione del campo* $\boldsymbol{B}$ *sia tangente alla linea stessa.*

4. una differenza fondamentale rispetto all'elettrostatica, dove le linee di forza sono sia chiuse che aperte (cioé dirette all'infinito), *le linee di forza del campo magnetico sono solo chiuse*: escono, quindi, dal polo Nord ed entrano nel polo Sud, oppure si chiudono su loro stesse (come nel caso del campo magnetico generato da un filo percorso da corrente, le cui linee di forza sono circonferenze concentriche al filo stesso...). Il motivo di questa particolarità è da ricondurre alla nota impossibilità di avere monopoli magnetici isolati. Inoltre, nel disegnare le linee di forza, è consuetudine utilizzare il *criterio di Farady*: il modulo del campo $\overrightarrow{B}$ in un punto è proporzionale al numero di linee di forza per unità di superficie che contiene il punto dato

5. quando un materiale viene magnetizzato, il campo magnetico non si instaura instantaneamente in tutti i punti dello spazio circostante, ma si propaga a partire dalla sorgente a una velocità finita che coincide con quella della luce nel vuoto (circa 300 000 km/s). L'interazione tra due magneti posti a una certa distanza non avviene, quindi, instantaneamente, ma solo dopo un certo intervallo di tempo (ancorchè brevissimo, in genere). Inoltre tale interazione non può essere considerata *a distanza*, perchè si manifesta tramite un "contatto" locale tra il magnete "di prova" e il campo magentico pre-esistente in quel punto.

25.6 Il geomagnetismo

Il fatto che l'ago di una bussola punti il suo polo Nord verso il polo Nord geografico conferma l'ipotesi che la Terra, nel suo complesso, si comporta come un magnete avente il suo polo Sud magnetico in prossimità del Nord geografico, e il polo Nord magnetico in prossimità del Sud geografico.

Le cause del magnetismo terrestre non sono ancora oggi ben chiare: si suppone che siano dovute alle numerose cariche elettriche presenti nelle rocce fuse in movimento nelle parti più interne del globo terrestre.

E' curioso far notare come i poli geografici e quelli magnetici non coincidano: la differenza, in data odierna, è di circa 12° ed è stata anche più elevata in passato. Nel corso dei millenni sono

[3]In realta, l'esistenza dei monopoli magnetici fu prevista dal fisico teorico Paul Dirac nel 1931 come proprietà legata ai fenomeni di quantizzazione della carica elettrica. Nel 2014 David S. Hall, dell'Amherst College, in Massachusetts, col suo team ha rilevato sperimentalmente i monopoli magnetici tramite la polarizzazione di atomi di rubidio tenuti ad una temperatura vicina allo zero assoluto.

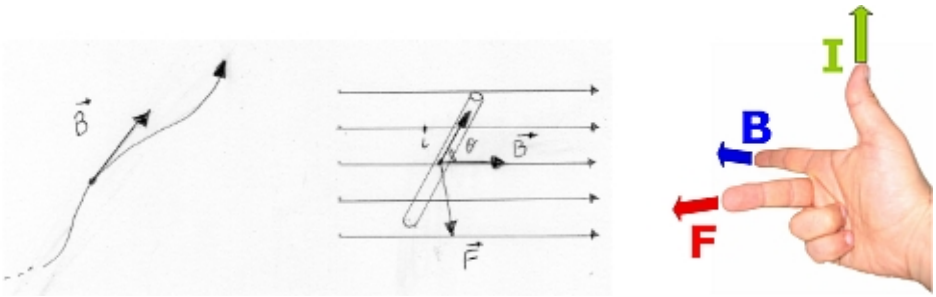

Figura 25.4: *Il vettore campo magnetico* $\vec{B}$ *è in ogni punto tangente alle linee di forza (a sinistra). Un conduttore rettilineo percorso da corrente* i *e disposto in un campo magnetico* $\vec{B}$ *risente di una forza di modulo F=Bil sen(θ) la cui direzione è data dalla "regola della mano destra" (al centro e a destra).*

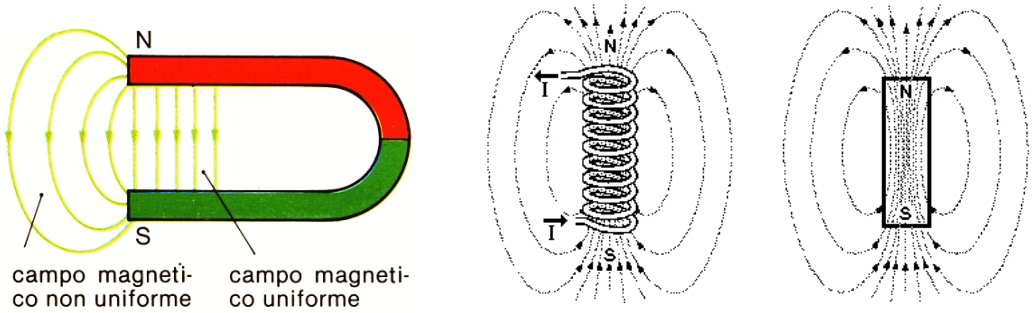

Figura 25.5: *Linee di forza di un campo magnetico prodotto da un magnete a ferro di cavallo (a sinistra). Similitudine tra il campo magnetico di un solenoide percorso da corrente e di una sbarra magnetizzata (a destra)*

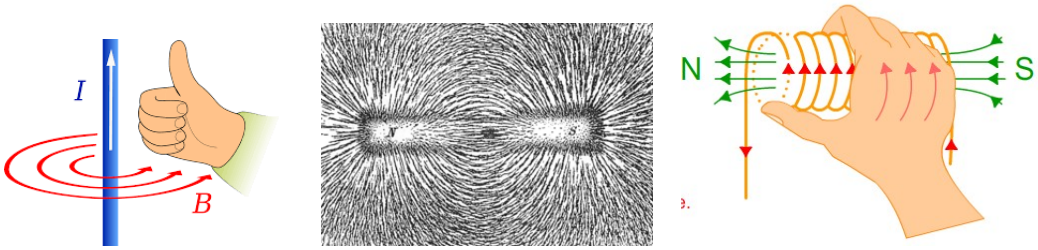

Figura 25.6: *Campo magnetico prodotto da un filo percorso da corrente (a sinistra), di una sbarretta (reso visibile dall'uso di limatura di ferro, al centro), e di un solenoide percorso da corrente. Tramite la regola della mano destra, il verso della corrente nelle spire mi fornisce la direzione Nord-Sud del campo magnetico (a destra).*

perfino avvenuti dei ribaltamenti dell'asse magnetico terrestre e numerosi indizi di carattere geologico dimostrerebbero come l'ultimo in ordine di tempo sia avvenuto circa 800 000 anni fa.

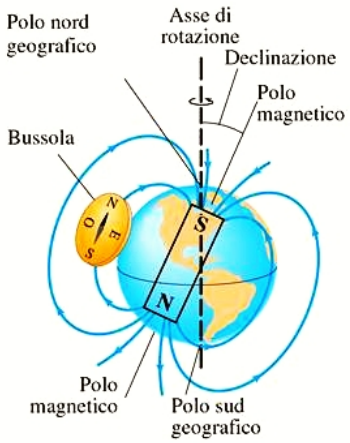

Figura 25.7: Campo magnetico terrestre

25.7 Legge di Biot-Savart

Tra il 1820 e il 1821 due fisici francesi, Jean Baptiste Biot (1774-1862) e Felix Savart (1791-1841), determinano sperimentalmente il valore del campo magnetico prodotto da un filo percorso da corrente.

La legge che porta il loro nome può essere facilmente dedotta anche solo per via teorica. Ricordando l'esperimento di Ampère, infatti, i due fili rettilinei e paralleli posti a distanza R l'uno dall'altro e percorsi ognuno dalle correnti i_1 e i_2 possono essere considerati sia come conduttori sottoposti ad una forza magnetica F reciproca (legge di Ampère,(25.1)), sia come fili sottoposti ad una forza $\overrightarrow{F}$ perché ognuno di essi è immerso nel campo magnetico $\overrightarrow{B}$ dell'altro filo.

Consideriamo ora il filo percorso da una corrente i_2 come se fosse immerso nel campo magnetico $\overrightarrow{B_1}$ del primo, le cui linee di forza (circolari e concentriche al primo conduttore), risultano essergli perpendicolari. Per questo motivo posso porre $sen(\alpha) = 1$, considerare solo il modulo dei vettori, e scrivere le due espressioni seguenti:

$$\begin{cases} F = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{i_1 i_2}{R} l \\ F = B i_1 l \, \sin(\alpha) \end{cases}$$

Ricavando il campo magnetico dalla seconda equazione $B = \frac{F}{i_2 L}$ e sostituendo ad F la prima espressione, si ottiene la cosiddetta **legge di Biot-Savart**:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{i_1 i_2}{i_2 L R}\, l = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{i_1}{R}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{i}{R} \tag{25.4}$$

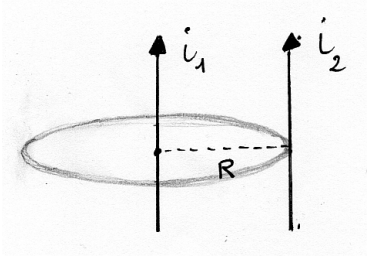

Figura 25.8: *Deduzione teorica della legge di Biot-Savart*

che fornisce il modulo del campo magnetico prodotto da un filo rettilineo percorso da corrente in un punto a distanza R da esso.

Come di consueto, la direzione del vettore B è tangente alla linea di forza nel punto considerato e il verso è fornito dalla *seconda regola della mano destra*: ovvero, posto il pollice lungo la direzione della corrente e piegando leggermente la altre quattro dita verso il palmo della mano, la direzione evidenziata è quella delle linee di forza del campo magnetico.

25.8 La forza di Lorentz

Come sappiamo, la corrente elettrica è costituita da un moto ordinato di cariche all'interno di un conduttore la cui intensità i risulta definita nel modo seguente:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} \tag{25.5}$$

dove Δq è la quantità di carica che attraversa la sezione S del conduttore nell'intervallo di tempo Δt. Nel caso di conduttori solidi, le cariche in moto sono solo quelle negative degli elettroni.

Poiché i dati sperimentali a cui abbiamo accennato in precedenza dimostrano che un filo percorso da corrente posto in un campo magnetico $\overrightarrow{B}$, risente di una forza magnetica $\overrightarrow{F}$, è logico concludere che questa forza, in realtà, agisca *su ogni singola carica elettrica quando questa è in moto con velocità $\overrightarrow{v}$ all'interno di un campo $\overrightarrow{B}$*.

Questa interazione, detta **forza di Lorentz** (dal nome del fisico Hendrik Lorentz, 1853-1928), ha modulo

$$F = qvB\, sen(\alpha) \tag{25.6}$$

e direzione e verso fornita dalla regola della mano destra, dove il pollice è orientato come il vettore velocità $\overrightarrow{v}$, l'indice come il campo magnetico $\overrightarrow{B}$ e la forza risultante $\overrightarrow{F}$ come il dito medio. Una particolare attenzione nel calcolo va posto al segno della carica che è preso, di default, **positivo**. Nel caso più frequente in cui si considerano *elettroni in moto, il verso della forza finale che agisce sulla carica in moto va* **invertito**. In modo più sintetico e formale, la forza di Lorentz risulta definita dal seguente prodotto vettoriale:

$$\overrightarrow{F} = q\,\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B} \tag{25.7}$$

Osserviamo che:

1. la forza di Lorentz è nulla, oltre ai casi banali in cui non c'è campo magnetico ($B = 0$) oppure quando la particella carica è ferma ($v = 0$), anche nella situazione in cui $sen(\alpha) = 0$, cioè quando il moto avviene lungo una direzione parallela alle linee di forza del campo magnetico ($\alpha = 0$). In questo caso la traiettoria è **rettilinea**.

2. Un caso notevole si presenta quando la particella si muove in direzione perpendicolare alle linee di forza. In tal caso $\alpha = 90°$ e $sen(\alpha) = 1$.
   Il modulo della forza di Lorentz assume qui il suo valore massimo, $F = qvB$. Per la regola della mano destra, la direzione del vettore $\overrightarrow{F}$ risulta essere sempre perpendicolare sia alla velocità $\overrightarrow{v}$ che al campo magnetico $\overrightarrow{B}$ in ogni punto della traiettoria. Ma una forza che è in ogni istante perpendicolare al vettore velocità è una *forza centripeta* e la traiettoria che essa determina è una **circonferenza**. Possiamo quindi ricavare il raggio R di tale circonferenza:

$$\begin{aligned} F_{centripeta} &= F_{Lorentz} \\ \frac{mv^2}{R} &= qvB \\ R &= \frac{mv}{qB} \end{aligned} \tag{25.8}$$

   Da questa ultima espressione, ricordando che la velocità tangenziale v in una traiettoria circolare è data da

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f$$

   è sufficiente sostituire la v così ottenuta nella (25.8) per ottenere sia la frequenza di rivoluzione f che il periodo T. Eseguendo i conti per ricavare la frequenza, si ha:

$$\begin{aligned} R &= \frac{m}{qB} 2\pi R f \\ f &= \frac{qB}{2\pi m} \end{aligned} \tag{25.9}$$

   da cui è immediato calcolare il periodo T necessario alla particella per percorrere un'orbita completa. Infatti, ricordando che il periodo è l'inverso della frequenza, posso scrivere:

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \tag{25.10}$$

   Si può così notare come una particella massiccia necessiti di più tempo per percorrere la circonferenza, mentre campi magnetici e cariche di valore elevato corrispondano ad orbite di periodo più breve.

3. Un caso intermedio ai primi due si presenta quando la direzione di moto forma un angolo α con le linee di forza di $\overrightarrow{B}$. Scomponendo il vettore velocità lungo due direzioni, una parallela e una perpendicolare alle linee di forza, possiamo concludere che la componente parallela introduce un moto rettilineo e la componente perpendicolare un moto circolare. La sovrapposizione di questi due effetti dà origine ad una **traiettoria elicoidale** che si avvolge lungo la direzione delle linee di forza magnetiche.

4. Osserviamo, infine, come la forza di Lorentz, essendo sempre perpendicolare alla velocità, lo è anche allo spostamento. Dalla definizione di lavoro, $L = F_{Lor} \cdot \Delta s \cdot cos(\alpha)$, con $\alpha = 90°$ si ottiene un risultato nullo per ogni percorso chiuso. La forza di Lorentz, quindi, è *conservativa.*

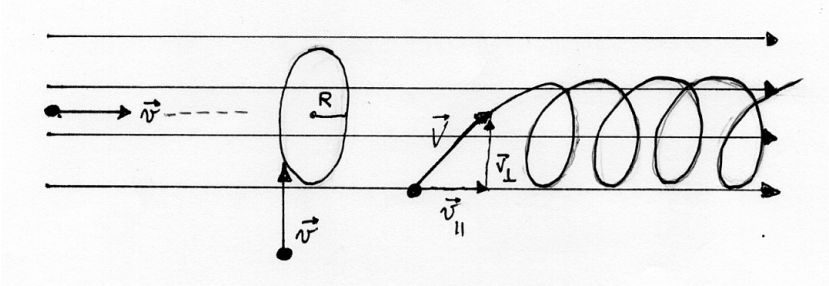

Figura 25.9: *Traiettorie diverse di una particella carica in un campo magnetico sottoposta alla forza di Lorentz.*

25.9 Il selettore di velocità e lo spettrometro di massa

Il selettore di velocità - Una applicazione della forza di Lorentz è all'interno del dispositivo chiamato selettore di velocità dove delle particelle elettricamente cariche attraversano una zona in cui sono presenti un campo elettrico e un campo magnetico tra loro perpendicolari.

Prendiamo, ad esempio, ad un condensatore posto all'interno di un campo magnetico costante con $\overrightarrow{B} \perp \overrightarrow{E}$. Se una particella *positivamente carica* entra tra le due armature con velocità v diretta come l'asse del condensatore (direzione +x), la sua traiettoria si curverà sotto gli effetti della forza elettrica diventando, come sappiamo, un arco di parabola (con concavità rivolta verso -y). Se è presente anche un campo magnetico disposto lungo la direzione -z, la forza magnetica che si sviluppa agisce in verso contrario a quella elettrica (quindi in direzione +y) e tende a "raddrizzare" la curvatura parabolica della traiettoria. Quando i moduli delle due forze sono uguali, la particella seguirà una direzione rettilinea uscendo dal condensature senza deviazioni. Ma ciò è possibile a condizione che il modulo della velocità assuma un particolare valore. Infatti:

$$\begin{aligned} F_{Lorentz} &= F_{elettrica} \\ qvB &= qE \\ v &= \frac{E}{B} \end{aligned} \tag{25.11}$$

In caso contrario, le particelle contraddistinte da valori diversi della velocità verrano più o meno incurvate.

Se in uscita dal dispositivo si mette una sottile fenditura e in ingresso si ha un miscuglio di particelle diverse con le più svariate velocità, il dispositivo permette di selezionare quelle che interessano in base alle loro caratteristiche cinematiche.

Lo spettrometro di massa - Questo strumento permette di selezionare le particelle in base alla loro massa e di individuare, ad esempio, i diversi isotopi di un dato elemento. Le sue applicazioni tecnologiche sono innumerevoli e vanno dalla medicina alla biologia, dalla fisica alle tecnologie ingegneristiche più avanzate. Il principio di funzionamento è piuttosto semplice: un selettore di velocità convoglia un fascio di ioni di massa m (diversa) e carica q in una zona dove è presente un campo magnetico $\overrightarrow{B}$ perpendicolare alla velocità v, che è la stessa per tutte le particelle. Il campo trasforma la traiettoria in una (semi)circonferenza di raggio dato dalla (25.8):

$$R = \frac{mv}{qB}$$

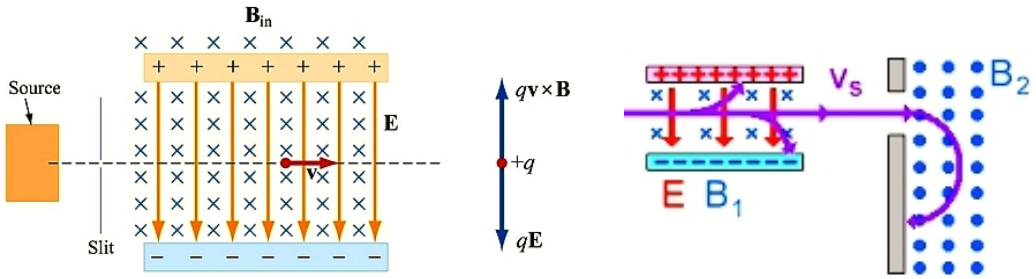

Figura 25.10: *Il selettore di velocità (a sinistra) e lo spettrometro di massa (a destra): rappresentazione grafica del loro funzionamento*

Poichè la velocità delle particelle è la stessa e il campo magnetico è uguale per tutte, particelle di massa diversa disegneranno traiettorie di raggio diverso: isotopi differenti dello stesso elemento potranno così essere riconosciuti e separati.

25.10 Teorema di Gauss per il campo magnetico

Consideriamo una superficie **piana** S; il suo orientamento nello spazio è dato dal versore $\overrightarrow{n}$ ad essa normale. Sia $\overrightarrow{B}$ un campo magnetico *costante*, le cui linee di forza attraversano S formando un angolo α con il versore $\overrightarrow{n}$. In analogia con il caso elettrostatico, definiamo *flusso del campo magnetico attraverso la superficie S* **aperta**, $\Phi_S(\overrightarrow{B})$ il seguente prodotto scalare:

$$\Phi_S(\overrightarrow{B}) = S\,\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{B} \tag{25.12}$$

ovvero

$$\Phi_S(\overrightarrow{B}) = BS\,cos(a) \tag{25.13}$$

Se si considera una superficie **chiusa** S, invece, avevamo visto in elettrostatica come il concetto di flusso ci fornisca una preziosa informazione sulle sorgenti del campo elettrico e un metodo algebrico per determinarne facilmente l'intensità anche in presenza di distribuzioni non puntiformi. Tale risultato è espresso dal **teorema di Gauss**, che per l'elettrostatica assume la seguente forma:

$$\Phi_S(\overrightarrow{E}) = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} \tag{25.14}$$

Nel caso del campo magnetico le cose vanno diversamente. Poichè non esistono monopoli magnetici, le linee di forza sono solo chiuse e questo ha come conseguenza che ogni linea in uscita dal polo Nord deve necessariamente rientrare nel polo Sud, e se in questo percorso intercetta la superficie S in uscita, deve, prima o poi, attraversarla anche in entrata dando luogo ad un flusso uscente (positivo) e uno entrante (negativo) che si eliminano a vicenda.

La conclusione di tale osservazione, espressa dal **teorema di Gauss** per il campo magnetico, non può che essere unica: *il flusso del campo magnetico che attraversa una qualunque superficie S chiusa è sempre nullo.* In simboli:

$$\Phi_S(\overrightarrow{B}) = 0 \tag{25.15}$$

Questa differenza rispetto alla (25.14) non è solo formale, ma, come abbiamo ampiamente sottolineato, strettamente legata alle diverse caratteristiche delle sorgenti dei campi considerati. L'unità di misura del flusso è il **weber**, simbolo *wb*, così definito: $1wb = 1T \cdot 1m^2$.

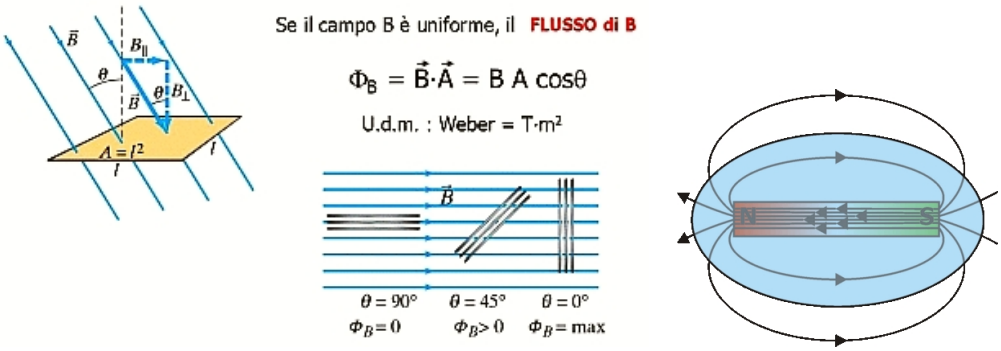

Figura 25.11: *Definizione di flusso del campo magnetico attraverso una superficie aperta (sinistra). Valore massimo e minimo del flusso in funzione dell'angolo tra superficie e linee di forza (centro). Teorema di Gauss: le linee di forza che escono dalla superficie devono rientrare perchè sono linee chiuse. Il flusso uscente ed entrante da una superficie chiusa si annulla e la loro somma è sempre zero (destra).*

25.11 Teorema della circuitazione di Ampère

Una delle caratteristiche più importanti del campo elettrico è quella di essere conservativo e di soddisfare il *teorema di conservazione dell'energia.* La dimostrazione di questa notevole affermazione passa attraverso il calcolo del lavoro L delle forze del campo per portare una carica elettrica q da un punto A ad un punto B, e la scoperta che:

1. tale valore non dipende dal tipo di percorso che unisce i due punti (rettilineo, mistilineo, curvilineo...), ma solo dalla posizione iniziale e finale di A e B

2. come conseguenza dell'affermazione precedente, il lavoro su un *qualunque* percorso chiuso γ (dove A e B coincidono) è sempre nullo

3. la circuitazione del campo elettrico su un *qualunque* percorso γ è sempre nulla: in formule, $C_\gamma(\vec{E}) = 0$.

La possibilità di usare il teorema di conservazione dell'energia semplifica molto la risoluzione di parecchie situazioni problematiche. Per questo motivo è inevitabile chiedersi se anche il campo magnetico goda di questa proprietà. Per dimostrare che, purtroppo, così non è, utilizzeremo il concetto di circuitazione e dimostreremo che esiste *almeno un* percorso chiuso γ dove, per i campi magnetici, si ottiene $C_\gamma(\vec{B}) \neq 0$.

Richiamiamo, per comodità, la nozione di *circuitazione per il campo elettrico*: essa è definita come *il lavoro per unità di carica lungo un qualunque percorso chiuso* γ. In formule:

$$C_\gamma(\vec{E}) = \frac{L_\gamma}{q}$$

Poichè il lavoro di una forza è definito solo su percorsi rettilinei e per forze di modulo costante, almeno la prima di queste due richieste non è verificata su un tratto curvo che si chiude su se stesso. Per questo motivo dobbiamo considerare il tragitto γ come la somma di infiniti percorsi estremamente piccoli, al limite di lunghezza infinitesima, per i quali tali richieste sono soddisfatte. Il lavoro totale sul percorso sarà così espresso dalla somma di tutti i singoli

lavori infinitesimi:

$$C_\gamma(\overrightarrow{E}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{L_i}{q}$$

Ricordando la definizione di lavoro come prodotto scalare di una forza per lo spostamento, si può scrivere:

$$C_\gamma(\overrightarrow{E}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{L_i}{q} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overrightarrow{F_i} \cdot \Delta \overrightarrow{l_i}}{q} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q\,\overrightarrow{E_i} \cdot \Delta \overrightarrow{l_i}}{q}$$

$$C_\gamma(\overrightarrow{E}) = \sum_{i=1}^{\infty} \overrightarrow{E_i} \cdot \Delta \overrightarrow{l_i} \tag{25.16}$$

oppure, in notazione differenziale

$$C_\gamma(\overrightarrow{E}) = \int_\gamma \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} \tag{25.17}$$

Nel caso di un campo magnetico non esistono monopoli magnetici e quindi viene meno l'analogia con la carica elettrica q per la quale calcolare il lavoro nel percorso da un punto A a un punto B.

Il procedimento che abbiamo ricordato, pur seguendo la medesima logica, non può essere riprodotto in modo identico, ma per *analogia formale* con la (25.16) possiamo definire la **circuitazione del campo magnetico** nel modo seguente:

$$C_\gamma(\overrightarrow{B}) = \sum_{i=1}^{\infty} \overrightarrow{B_i} \cdot \Delta \overrightarrow{l_i} \tag{25.18}$$

oppure, con scrittura equivalente, ma in forma differenziale:

$$C_\gamma(\overrightarrow{B}) = \int_\gamma \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} \tag{25.19}$$

Siamo ora pronti per chiederci se il campo magnetico è conservativo.

A tal fine, consideriamo un filo rettilineo percorso da corrente i: sappiamo che le linee di forza sono delle circondìferenze concentriche al filo stesso e che in ogni punto a distanza R vale la legge di Biot-Savart.

Consideriamo come percorso chiuso γ su cui calcolare la circuitazione una qualunque linea di forza circolare posta a distanza R dal conduttore. Ricordiamo, inoltre, che in ogni punto della linea di forza sia la direzione del vettore $\overrightarrow{B}$ che quello dello spostamento (di lunghezza infinitesima) $\Delta \overrightarrow{l}$ sono entrambi tangenti alla circonferenza e quindi paralleli tra loro. L'angolo tra queste due direzioni risulta così nullo, per cui $sen(\alpha) = 0$.

Pensiamo ora di suddividere la circonferenza γ in tratti infinitesimi di lunghezza infinitesima. Svolgendo i conti:

$$C_\gamma(\overrightarrow{B}) = \sum_{i=1}^{\infty} \overrightarrow{B_i} \cdot \Delta \overrightarrow{l_i} = \sum_{i=1}^{\infty} B_i\, \Delta l_i\, sen(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i\, \Delta l_i$$

Poichè ci stiamo muovendo lungo una circonferenza di raggio R, per la legge di Biot-Savart il valore del campo magnetico è costante in ogni punto e può essere raccolto a fattor comune

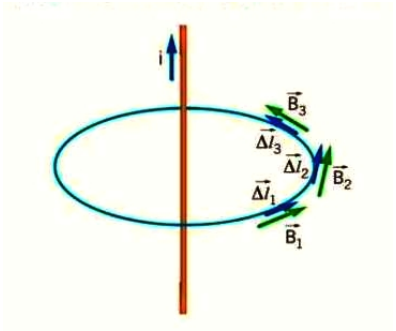

Figura 25.12: *La circuitazione del campo magnetico attorno ad un filo percorso da corrente non è nulla se si prende come percorso una delle linee di forza del campo.*

fuori dal simbolo di sommatoria. Inoltre, ricordando la sua espressione numerica, si ha $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{i}{R}$ e possiamo scrivere:

$$C_\gamma(\overrightarrow{B}) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i\,\Delta l_i = B\sum_{i=1}^{\infty}\Delta l_i = B\cdot 2\pi R = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{i}{R}\cdot 2\pi R$$

Semplificando opportunamente, si arriva al risultato:

$$C_\gamma(\overrightarrow{B}) = \mu_0 i \tag{25.20}$$

dove con i si intendono le **correnti concatenate** al circuito chiuso γ (cioé racchiuse al suo interno). Poichè il valore della circuitazione è nullo solo nel caso in cui non ci siano correnti concatenate, il ché è un caso particolare, possiamo concludere che *il campo magnetico non è conservativo.*

25.12 Momento torcente su una spira

La scoperta che un filo percorso da corrente è soggetto ad una forza magnetica quando immerso in un campo magnetico è stata il punto di partenza di tutta una serie di importantissime applicazioni tecnologiche che hanno cambiato il nostro modo di vivere a partire dalla fine dell'Ottocento.

Nel caso di motori elettrici e generatori, la spira ha solitamente la forma di un rettangolo di larghezza l e altezza h. Sia $\overrightarrow{n}$ il versore perpendicolare al piano della spira e $\overrightarrow{B}$ un campo magnetico uniforme di direzione perpendicolare a $\overrightarrow{n}$. Nel momento in cui passa corrente (vedi figura), sui lati orizzontali AB e CD non risulta applicata nessuna forza mentre sui due lati verticali BC e DA, perpendicolari a $\overrightarrow{B}$, si viene a formare una coppia di forze di uguale modulo $F = Bih$ e verso opposto (una diretta internamente al foglio e l'altra uscente) che danno origine ad un momento torcente $\overrightarrow{M}$ il cui effetto è quello di indurre una rotazione attorno ad un asse verticale passante per il punto medio di AB e CD. Il modulo di $\overrightarrow{M}$ risulta essere:

$$M = Bih\cdot\frac{l}{2} + Bih\cdot\frac{l}{2} = Bihl$$

Se ora osserviamo che il prodotto hl equivale all'area A della spira, il momento torcente può essere scritto nel modo seguente:

$$M = BiA$$

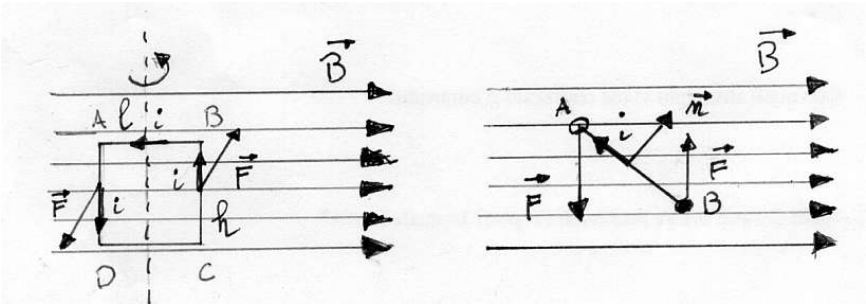

Figura 25.13: *Momento torcente su di una spira percorsa da corrente in un campo magnetico: vista di fronte, con* $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{B}$ *(a sinistra); vista dall'alto, dove* $\overrightarrow{n}$ *forma un generico angolo* θ *rispetto a* $\overrightarrow{B}$ *(a destra).*

Quando la spira inizia a ruotare, il valore del momento diminuisce di una quantità $sen(\theta)$, dove l'angolo θ è dato dalla direzione del campo magnetico $\overrightarrow{B}$ e dalla normale al piano della spira. Supponendo che la spira sia formata da un avvolgimento di N fili conduttori (bobina) e considerandola in una posizione generica, il momento torcente assume modulo:

$$M = BiA\, sen(\theta) \tag{25.21}$$

La validità dell'espressione (25.21) è generale, anche se la forma della spira non dovesse essere rettangolare: nel caso di un avvolgimento circolare, ad esempio, l'area è data da $A = \pi R^2$ e il momento torcente avrebbe modulo $M = Bi{\cdot}\pi R^2 \cdot sen(\theta)$.

25.13 Campo magnetico di spire e solenoidi

Consideriamo una spira, per comodità di forma circolare, percorsa da una corrente di intensità i. La regola della mano destra ci consente di capire che le linee di forza, concentriche rispetto al filo, attraversano perpendicolarmente il piano della spira e si addensano al centro con le seguenti caratteristiche:

- la direzione del campo è perpendicolare al piano della spira e il suo verso è fornito dalla regola della mano destra se si dispongono le dita, leggermente incurvate verso il palmo della mano, parallele alla corrente
- si può dimostrare che il modulo di $\overrightarrow{B}$ al centro della spira è dato da:

  $$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

  con R raggio della spira, mentre, in presenza di N avvolgimenti, si ha $B = \frac{\mu_0 I}{2R} N$
- due spire disposte parallelamente una all'altra si attirano se percorse da correnti equiverse, si respingono se le correnti hanno verso opposto comportandosi, di fatto, come due sbarre magnetiche affiancate

Si chiama **solenoide** un filo avvolto in una serie di spire ravvicinate in forma elicoidale. Al passaggio della corrente nel conduttore, nello spazio interno al solenoide si forma un campo magnetico particolarmente intenso (mentre quello esterno è in genere molto più debole e può essere trascurato) con le seguenti caratteristiche:

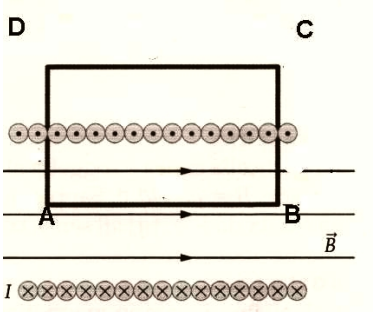

Figura 25.14: *Calcolo del valore del campo magnetico interno ad un solenoide*

- il campo magnetico interno al solenoide è *uniforme*
- detto N il numero totale di spire, L la lunghezza del solenoide e $n = \frac{N}{L}$ il numero di spire per unità di lunghezza, il campo magnetico interno assume il valore:

$$B = \mu_0 n i \tag{25.22}$$

  e può essere variato a piacimento agendo sull'intensità di corrente i
- se all'interno del dispositivo viene inserito un materiale la cui costante di permeabilità magnetica relativa è μ_r, il modulo del campo diventa:

$$B = \mu_0 \mu_r \, n i \tag{25.23}$$

  il verso del campo magnetico viene sempre individuato dalla regola della mano destra: disponendo le dita della mano come il verso della corrente nelle spire, la direzione del dito pollice è quella di $\overrightarrow{B}$.

Produciamo ora una semplice dimostrazione della (25.22) utilizzando il teorema di Ampère della circuitazione. A tal fine, immaginiamo di sezionare il solenoide lungo il diametro delle spire. Individuiamo un percorso γ, per comodità di forma quadrata ABCD, che in parte sia all'interno e in parte all'esterno del solenoide. In particolare, il tratto AB sia interno, CD esterno e i lati BC e DA siano perpendicolari alla sezione delle spire. Per il teorema della circuitazione:

$$C_\gamma(\overrightarrow{B}) = B_{int}\, \bar{AB}\, cos\theta + B\, \bar{BC}\, cos\theta + B_{est}\, \bar{CD}\, cos\theta + B\, \bar{DA}\, cos\theta =$$

$$= B_{int}\, \bar{AB} + 0 + 0 + 0 = B_{int}\, \bar{AB}$$

Infatti, nel primo addendo $\theta = 0$; nel secondo e nel quarto addendo $\theta = 90°$, per cui $cos\theta = 0$; nel terzo addendo, nella zona all'esterno del solenoide, $B = 0$.

Ma per il teorema di Ampère

$$C_\gamma(\overrightarrow{B}) = \mu_0 i$$

Equiparando le ultime due espressioni, si ottiene:

$$\mu_0 i = B_{int}\, \bar{AB}$$

Ricordiamo ora che i sono le correnti concatenate al percorso chiuso γ che in questo caso corrispondono al numero$N$ di spire racchiuse nel tratto $\bar{AB}$. Possiamo quindi scrivere:

$$\mu_0 N i = B_{int}\, \bar{AB}$$

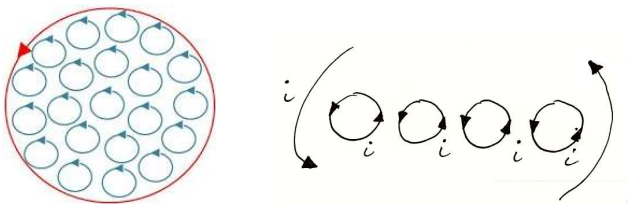

Figura 25.15: *L'ipotesi di Ampère: all'interno della materia esistono delle correnti microscopiche che rendono magnetiche alcune rocce come nel caso della magnetite. Nei punti di vicinanza tra le spire, le correnti fluiscono in verso opposto e i loro contributi si annullano. In totale è come se ci fosse un'unica corrente che scorre lungo la superficie esterna del materiale.*

$$\mu_0 \frac{N}{AB} i = B_{int}$$

Ma $\frac{N}{AB}$ è anche il numero di spire per unità di lunghezza n, dove $n = \frac{N}{AB}$. L"intensità del campo magnetico interno ad un solenoide può così essere espressa dalla seguente formula, in accordo con quanto affermato dalla (25.22):

$$B_{int} = \mu_0 n i$$

25.14 Proprietà magnetiche della materia

I vari materiali reagiscono in modo diverso quando sono inseriti in un campo magnetico e, a seconda della loro intensità di magnetizzazione, espressa dal coefficiente di *permeabilità magnetica* $\mu = \mu_0 \mu_r$, sono suddivisi in tre categorie:

1. i materiali *paramagnetici*, come l'aria, l'alluminio e il platino, dove μ_r non dipende dal campo magnetico esterno ed è di poco superiore all'unità (per l'aria, $\mu_r = 1,000\,004$)
2. i materiali *diamagnetici*, come l'acqua, l'argento il rame, dove μ_r non dipende dal campo magnetico esterno ed è di poco inferiore all'unità (per l'acqua, $\mu_r = 0,999\,991$)
3. i materiali *ferromagnetici*, come il nichel, il ferro e il cobalto, dove μ_r dipende sia dal campo magnetico esterno che dalla temperatura e può raggiungere valori altissimi, compresi tra 1 000 e 10 000 !!

Perchè la materia interagisce con il campo magnetico? Perchè esistono magneti naturali come la magnetite?

L'ipotesi di Ampère delle correnti microscopiche è il primo tentativo di dare una risposta sensata a questi interrogativi.

Senza avere nessuna idea della struttura atomica, settant'anni prima della scoperta dell'elettrone, Ampère intuisce la presenza, all'interno della materia, di spire microscopiche distribuite in modo ordinato e percorse da correnti con lo stesso verso.

Ipotizzando che le correnti in queste spire producano campi magnetici, il contributo di due spire affiancate si annulla a vicenda perchè, più o meno nella stessa posizione, le loro correnti si muovono lungo direzioni opposte. Ripetendo lo stesso ragionamento per tutte le spire, l'unico contributo che rimane è quello delle spire più periferiche che, complessivamente, si

comportano come se fosse presente una corrente costante circolante sulla superficie laterale del materiale. Ed è questa corrente la causa dei fenomeni magnetici naturali.

Sarà necessario quasi un secolo per dimostrare che l'ipotesi di Ampère è corretta.

Oggi, infatti, sappiamo che ogni atomo contiene cariche in movimento (gli elettroni) e si comporta come una spira conduttrice generando un microscopico campo magnetico. Se il materiale è immerso in un campo esterno, le spire subiscono un momento torcente e sull'oggetto si manifestano fenomeni come quelli che abbiamo analizzato in precedenza. Poichè l'orientamento degli atomi è completamente casuale, il loro contributo magnetico è nullo. La maggior parte dei materiali, infatti, non evidenzia comportamenti magnetici. Esiste però, un secondo campo magnetico microscopico, dovuto allo *spin*[4] dell'elettrone. Tale contributo non sempre è nullo e può essere la causa del *diamagnetismo*. Una esauriente spiegazione del fenomeno richiederebbe una conoscenza più profonda delle proprietà atomiche e la tralasciamo.

Se per l'elevata intensità del campo esterno o per delle proprietà caratteristiche del materiale tutte le correnti microscopiche vengono orientate nella stessa direzione, il valore del campo magnetico prodotto dal materiale può aumentare sia di poco (*paramagnetismo*) che di molto (*ferromagnetismo*). Trattiamo nei dettagli solo quest'ultimo fenomeno nel prossimo paragrafo.

25.15 I materiali ferromagnetici

Consideriamo un solenoide al cui interno è inserito un materiale ferromagnetico (nichel, ferro o cobalto, ad esempio). L'intensità del campo magnetico prodotto dal solenoide può essere regolata a nostro piacimento variando la corrente i che passa nel filo conduttore:

$$B_{sol} = \mu_0 n\, i$$

Se ora osserviamo il comportameno del materiale ferromagnetico, misurandone la magnetizzazione B_{fer} e mettendo in grafico il valore ottenuto in funzione di B_{sol}, possiamo notare le seguenti anomalie:

1. il valore di B_{fer} aumenta al crescere di B_{sol}, come è logico aspettarsi, ma raggiunge abbastanza rapidamente un imprevisto valore di **saturazione.** Questa parte iniziale del grafico è detta **curva di prima magnetizzazione**

2. **il valore finale di B_{fer} è molto elevato**, al punto da superare anche di decine di migliaia di volte l'intensità del campo magnetico prodotto dal solenoide

3. diminuendo poi il valore del campo esterno B_{sol}, il materiale ferromagnetico tende a smagnetizzarsi con estrema fatica; la curva non ricalca il tratto di grafico iniziale, ma rimane su valori sensibilmente maggiori. Inoltre, per $B_{sol} = 0$, si ha la persistenza di una **magnetizzazione residua** che dimostra come questo tipo di materiali risponda con notevole ritardo alla tentativo di riportarsi alla stuazione di partenza. Da qui il nome di *isteresi* (dal greco hystéresis, *ritardo*)

[4] *In meccanica quantistica lo spin è una forma di momento angolare intrinseco dell'elettrone che, per analogia, può essere rappresentato da un ipotetico moto di rotazione dell'elettrone attorno al suo asse.*

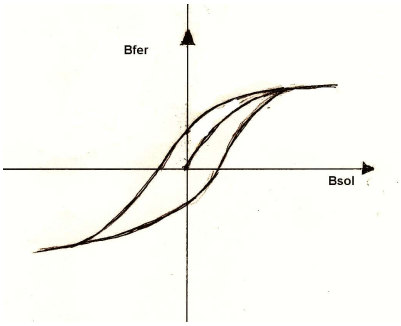

Figura 25.16: *Ciclo di isteresi dei materiali ferromagnetici*

4. se si vuole smagnetizzare completamente il materiale, è necessario applicare al solenoide una corrente di verso opposto alla precedente. Si viene così a formare un campo magnetico contrario a quello di partenza. Con questo metodo è possibile ottenere una magnetizzazione di segno opposto, ma che manifesta ancora le particolarità elencate in precedenza, cioè: il fenomeno di *isteresi*, un inspiegabile valore di *saturazione* e un livello di intensità magnetica *altissimo*. Invertendo ancora la corrente, il campo magnetico riassume verso uguale a quello di partenza: la curva si chiude su se stessa prendendo il nome di **ciclo di isteresi.**

5. le proprietà ferromagnetiche dei materiali vengono completamente distrutte quando la temperatura raggiunge un valore caratteristico, in genere molto elevato, detto **temperatura di Curie** (per il ferro**,** $T_{Curie} = 768$**°C).**

Una spiegazione di questi particolari fenomeni fu proposta dal fisico francese Pierre Ernest Weiss (1865-1940) il quale ipotizzò che, a livello microscopico, il materiale ferromagnetico fosse costituito da aree microscopiche particolari, dette poi **domini di Weiss**, all'interno delle quali l'orientamento magnetico degli atomi è identico.

In condizioni normali, ogni dominio ha una diversa direzione di magnetizzazione e gli effetti magnetici globali tendono a neutralizzarsi, ma, sotto gli effetti di un campo esterno, i domini si orientano fino ad assumere tutti la stessa direzione riuscendo, per questo motivo, a formare campi particolarmente intensi.

Tutto ciò non può avvenire per i materiali comuni perché, per ottenere lo stesso effetto in assenza dei domini di Weiss, il campo esterno dovrebbe riuscire ad orientare i singoli atomi uno ad uno! Operazione resa di fatto impossibile dagli effetti caotici e distruttivi introdotti dall'agitazione termica molecolare a temperatura ambiente.

L'ipotesi dei domini è in grado di giustificare le anomalie a cui si è accennato in precedenza. Infatti, quando tutti i domini sono orientati:

1. il campo magnetico prodotto è massimo, e tale valore non può essere superato (livello di saturazione).

2. inoltre, proprio la possibilità di avere *tutti* gli atomi egualmente orientati, consente di ottenere campi estremamente intensi.

3. una volta raggiunta la saturazione, l'ordine a livello microscopico è talmente elevato che i fenomeni magnetici generati tendono a permanere e ad *autosostenersi* anche riducendo o azzerando il campo esterno (da qui l'isteresi e la magnetizzazione residua).

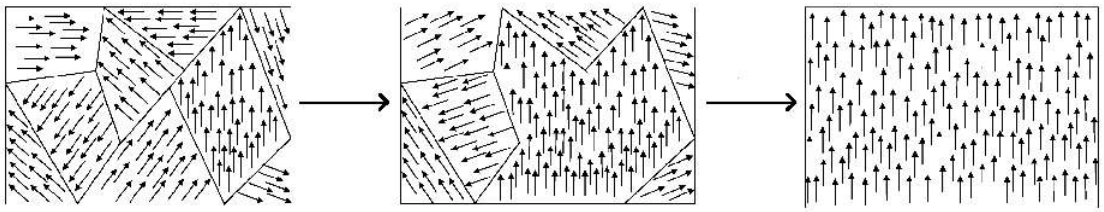

Figura 25.17: *Secondo l'ipotesi dei Domini di Weiss, all'aumentare del campo magnetico esterno gli atomi si dispongono in modo da orientarsi tutti nella stessa direzione nonostante l'azione caotica dell'agitazione termica molecolare. Questa caratteristica dà origine a campi magnetici molto intensi e con le particolari proprietà evidenziate dal ciclo di isteresi.*

4. l'odine atomico introdotto dalla presenza dei domini di Weiss può essere distrutto solo con livelli elevatissimi di agitazione termica, ottenibili mediante temperature molto alte. Ciò spiega gli effetti introdotti dalla temperatura di Curie.