Capitolo 3

Proporzionalità e grafici

3.1 Relazioni tra grandezze fisiche

Un aspetto importante della scienza sperimentale risiede nello studio della relazione matematica che può eventualmente esistere tra due grandezze fisiche.

L'analisi dello spazio S percorso da un oggetto in moto in funzione del tempo "t" permette, ad esempio, di ottenere la misura della velocità; lo studio del volume V di un corpo in funzione della sua massa M consente di ricavarne la densità; la misura dell'allungamento L di una molla causato dalla forza F ad essa applicata ci permette di conoscere il valore della costante elastica del materiale studiato...

Il modo di procedere è, in sintesi, il seguente: una volta che siano stati ottenuti un numero sufficientemente elevato di valori (ad esempio, diverse misure di volume V in funzione della massa M di un dato oggetto), essi vengono riportati in un grafico cartesiano. I valori relativi alla *variabile indipendente* (il volume V, nel nostro esempio) devono essere posizionati sull'*asse X delle ascisse*, quelli della *variabile dipendente* (la massa M) *sull'asse Y delle ordinate.*

Il tipo di curva su cui i punti tendono ad allinearsi (in modo più o meno preciso, a causa della presenza di errori casuali) permette di ricavare la proporzionalità esistente tra le due grandezze studiate. Nel caso in cui, invece, non ci fosse nessuna relazione, la disposizione dei punti nel grafico risulterebbe completamente casuale e confusa.

Illustriamo meglio questo importante aspetto, prendendo, come esempio, gli studenti di una determinata scuola e mettendo in relazione il numero progressivo con cui compaiono nel registro di classe con il loro giorno di nascita. E' lecito aspettarsi che non esista nessun tipo di logica tra questi valori!! Infatti, se riportiamo i punti ottenuti in un grafico cartesiano, possiamo notare come essi si dispongono in modo completamente casuale.

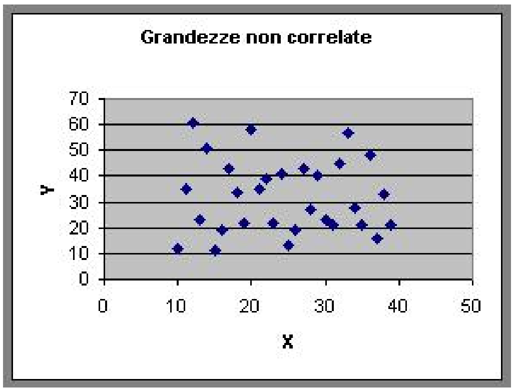

Fig.3.1 - *Quando non esiste una precisa relazione tra due grandezze x e y, i punti si dispongono nel piano cartesiano in modo casuale.*

Ben diverso è il caso in cui si considerassero i punti ottenuti dai valori di due grandezze X, Y legate tra loro da una precisa relazione matematica come, ad esempio, una equazione.

Consideriamo, a tal fine, le seguenti espressioni algebriche:

$y = 2x$

$y = 4x$

A partire da queste equazioni, costruiamo una tabella di numeri nel seguente modo: poiché la "x" è la variabile indipendente, attribuiamo ad essa dei valori a nostro piacimento, ad esempio 0, 1, 2, 3, 4, 5... Sostituiamo questi numeri alla "x" e ricaviamo il corrispondente valore della "y". Eseguiamo l'operazione per entrambe le equazioni. I risultati sono raccolti nelle due tabelle seguenti:

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

x	y
0	0
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20

Fig.3.2 - *Coppie di valori* x,y *ottenuti dalle equazioni $y = 2x$ (sinistra) e $y = 4x$ (destra).*

Se ora riportiamo queste due serie di numeri in un grafico cartesiano, possiamo notare come i punti che le rappresentino vadano a disporsi su due rette passanti per l'origine di inclinazione differente: la maggiore inclinazione della seconda retta (colore rosso in Fig.3.3) è attribuibile al valore più alto del coefficiente moltiplicativo della "x": 4 contro 2.

Per questo motivo tale numero, d'importanza fondamentale per il nostro discorso, prende il nome di *coefficiente angolare della retta.*

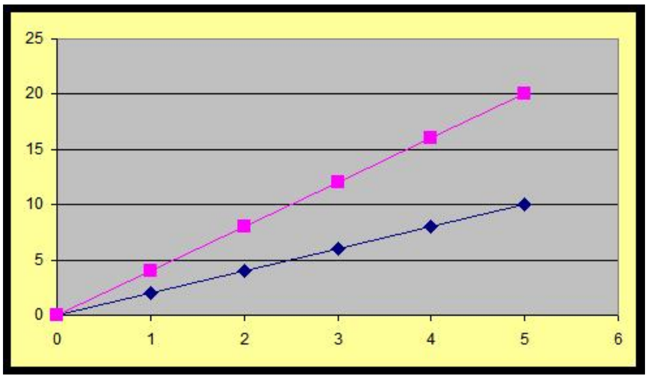

Fig.3.3 - *Punti corrispondenti all'equazione $y = 2x$ (retta blu) e all'equazione $y = 4x$ (retta rossa). Le diverse inclinazioni dipendono dal rispettivi "coefficienti angolari"*

Consideriamo ora le seguenti equazioni:

$y = 2x$

$y = 4x + 5$

Ripetiamo il procedimento precedente. Attribuiamo dei valori comodi alla "x" e ricaviamo quelli della variabile indipendente "y": otteniamo le tabelle in Fig.3.4. Riportiamo poi i punti corrispondenti in un grafico cartesiano.

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

x	y
0	5
1	7
2	9
3	11
4	13
5	15

Fig.3.4 - *Coppie x,y ottenute dalle equazioni $y = 2x$ (sinistra) e $y = 2x + 5$ (destra).*

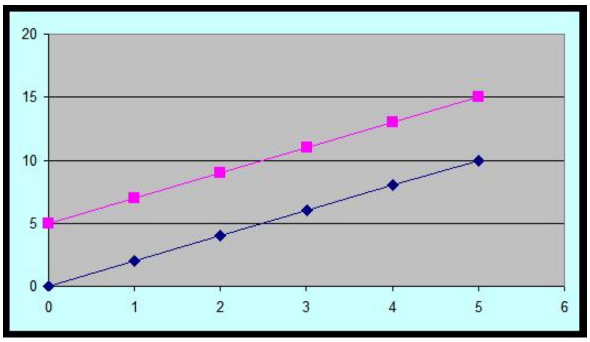

Fig.3.5 - *Punti corrispondenti all'equazione $y = 2x$ (retta blu) e all'equazione $y = 2x + 5$ (retta rossa). Il coefficiente angolare è uguale (rette parallele). Cambia, invece, l'intersezione con l'asse delle y.*

Le due rette che si ottengono hanno ora lo stesso coefficiente angolare, cioè la stessa inclinazione. Sono quindi perfettamente parallele, ma differiscono per il valore iniziale, quello in cui esse intercettano l'asse delle "y" e che risulta essere uguale al numero che accompagna il termine "2x" (0 nel primo caso, +5 nel secondo).

Volendo generalizzare le conclusioni a cui siamo giunti, possiamo affermare che:

1. l'equazione generale di una retta in un piano cartesiano è del tipo:

$$y = mx + q \tag{3.1}$$

2. il valore del coefficiente angolare m è responsabile dell'inclinazione della retta

3. il valore del coefficiente q (detto intercetta all'origine) determina l'intersezione della retta con l'asse y delle ordinate.

Abbiamo così imparato a disegnare una retta in un piano cartesiano, supposta nota a priori la sua equazione.

Nella pratica di laboratorio è però importante fare anche, e soprattutto, il contrario, cioè saper *ricavare l'equazione di una retta a partire dalla conoscenza del suo grafico cartesiano.*

Ciò diventa possibile usando il seguente metodo per calcolare i coefficienti m e q:

- il valore di q è determinabile direttamente dal grafico: è l'ordinata y del punto in cui la retta interseca l'asse delle ordinate

- ottenere il coefficiente angolare m è un po' più laborioso. Si tracci il grafico della retta che attraversa i punti sperimentali e si considerino due punti A e B su di essa le cui coordinate siano note con sufficiente precisione: A (x_A; y_A) e B (x_B; y_B). Diamo ora la definizione di *coefficiente angolare "m" di una retta:*

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \tag{3.2}$$

  Ad esempio, se fosse $m = 3$ e $q = 5$, avremmo l'equazione della retta $y = 3x+5$. Se, invece, come più capita più frequentemente, l'intersezione con le ordinate fosse nulla e ad esempio risultasse $m = 2$, avremmo la retta di equazione $y = 2x$.

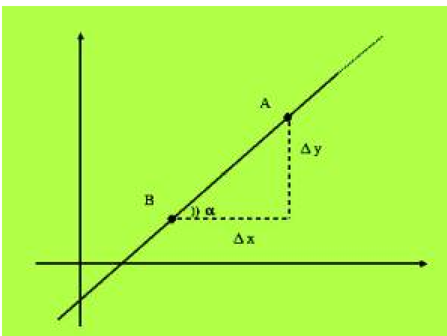

Fig.3.6 - *Calcolo del coefficiente angolare della retta.*

3.2 Le proporzionalità

I principali tipi di proporzionalità che intercorrono tra due variabili X e Y sono cinque: proporzionalità diretta, proporzionalità lineare, proporzionalità inversa, proporzionalità quadratica, proporzionalità quadratica inversa.

Proporzionalità diretta - Si ha una proporzionalità diretta se la curva che approssima i dati sperimentali è una *retta particolare, passante per l'origine* di equazione:

$$y = mx \tag{3.3}$$

In questo caso la relazione è tale che, se raddoppio o triplico il valore della variabile indipendente x, anche il valore della variabile dipendente y risulterà raddoppiato o triplicato.

Proporzionalità lineare - Avremo una relazione di tipo lineare se i punti sperimentali cadono su di una *retta generica, non passante per l'origine* di equazione:

$$y = mx + q \tag{3.4}$$

In questo caso non è più vero che al raddoppiare del valore di x raddoppia anche la y. La relazione che lega le due incognite è invece la seguente: ogni volta che x aumenta di una certa quantità H, allora y aumenta sempre della stessa quantità K (con, in genere, H $\neq$ K).

Proporzionalità inversa - Si ha il caso di una proporzionalità inversa se i punti si dispongono su di un'*iperbole equilatera asintotica ai due assi cartesiani*, una curva, cioè, che verifichi l'espressione:

$$y = \frac{k}{x} \tag{3.5}$$

dove k è costante. La relazione che lega le variabili in questo caso è tale che, se una raddoppia, l'altra dimezza il proprio valore; se la prima triplica, la seconda diventa un terzo...

Proporzionalità quadratica - I valori sperimentali sono legati da una proporzionalità quadratica se i punti si dispongono su una *parabola* di equazione:

$$y = x^2 \tag{3.6}$$

In questo caso, se la x aumenta di 2, 3, 4, 5... volte, la y aumenta secondo il quadrato di tali quantità, cioè di 4, 9, 16, 25... volte.

Proporzionalità quadratica inversa - L'ultimo caso che consideriamo è la proporzionalità quadratica inversa. I punti sperimentali si dispongono lungo una curva dall'andamento "simile" (ma non uguale !!) ad una iperbole equilatera e devono soddisfare l'equazione:

$$y = \frac{k}{x^2} \tag{3.7}$$

L'esistenza di una relazione matematica in grado di interpretare i dati sperimentali ci permette di inquadrare il fenomeno studiato in un contesto più generale e di ottenere previsioni che ne estendono la comprensione oltre i valori effettivamente testati in laboratorio. Questo diventa possibile operando un processo di **interpolazione** o di **estrapolazione** dei dati conosciuti. Con l'interpolazione si cerca di *determinare un valore intermedio a due misure già in nostro possesso*; con l'estrapolazione si tenta di *prolungare la curva oltre l'ultimo dato sperimentato in laboratorio.*

In entrambi i casi si sostituisce un semplice e veloce calcolo matematico ad un reale processo di misura. La correttezza del risultato ottenuto si fonda sull'esistenza di una precisa legge di proporzionalità che lega le grandezze studiate: se non si conoscesse questa legge, o se essa non esistesse affatto, i processi di interpolazione o estrapolazione sarebbero impossibili da applicare.

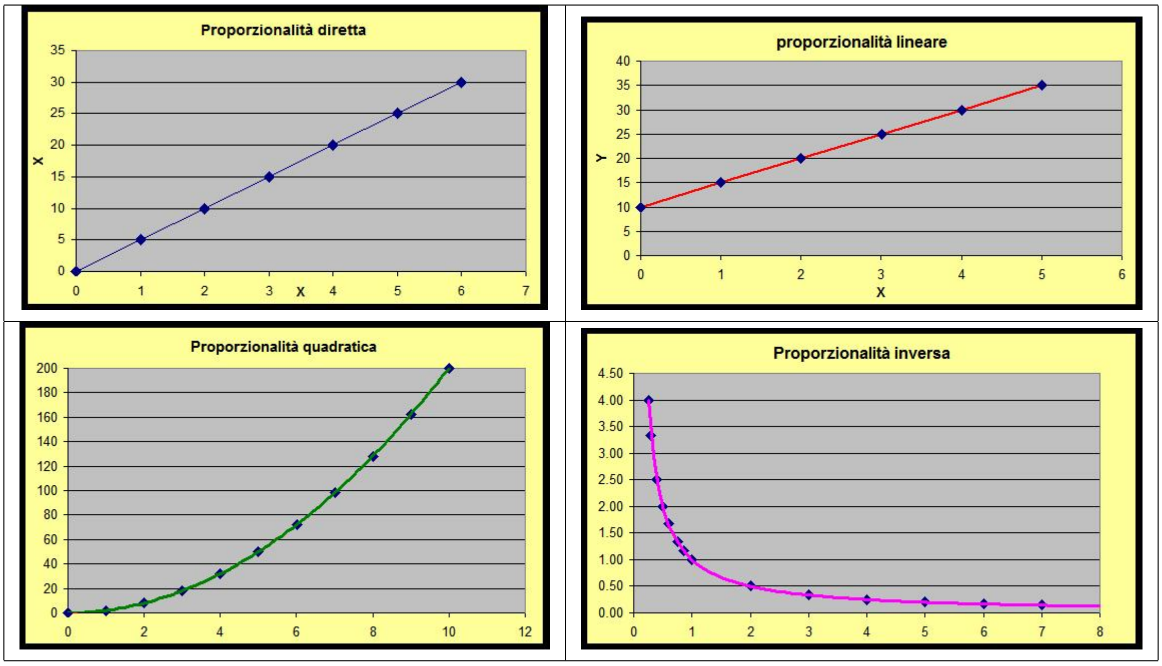

Fig.3.7 - *Grafici cartesiani delle principali proporzionalità.*

3.3 Come riconoscere una proporzionalità

Le espressioni algebriche introdotte nel paragrafo precedente possono farci riconoscere i vari tipi di proporzionalità anche senza eseguire il grafico cartesiano corrispondente. Allo scopo, è sufficiente esplicitare l'equazione della curva rispetto alla costante ivi contenuta e costruire un tabella come quella qui di seguito presentata. Supponiamo di avere a disposizione sei valori (x,y). Disponiamoli nelle prime due colonne e cerchiamo, nelle successive, quale loro combinazione algebrica rimanga *costante*. La **regola di calcolo** da usare di volta in volta è espressa *nella seconda riga della tabella*.

x	**y**	**diretta**	**lineare**	**inversa**	**quadratica**	**quadratica inversa**
		$\frac{y}{x} = cost.$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = cost.$	$yx = cost.$	$\frac{y}{x^2} = cost.$	$yx^2 = cost.$
1	**5**	5	2	5	5	5
2	**7**	3,5	2	14	1,75	28
3	**9**	3	2	27	1	81
4	**11**	2,75	2	44	0,688	176
5	**13**	2,6	2	65	0,52	325
6	**15**	2,5	2	90	0,417	540

Il valore che rimane costante è quello relativo alla quarta colonna: i dati, in questo esempio, sono quindi legati da una proporzionalità di tipo *lineare*.

3.4 La regressione lineare: cenni elementari

Come ben sappiamo, ogni misura è sempre affetta da un certo errore casuale ed è praticamente impossibile che tutti i punti sperimentali cadano perfettamente su uno dei grafici esposti in precedenza. Questo fatto può complicare non poco l'analisi dei dati ottenuti in laboratorio. Infatti, anche quando può sembrare evidente che i nostri valori giacciono su una retta del tipo

$$y = mx + q \tag{3.8}$$

è bene prestare particolare attenzione alla scelta dei parametri m e q perché, in prima analisi, possono essere molte le rette che approssimano i punti del grafico.

Il problema, in definitiva, è il seguente: *tra tutte le rette possibili che si avvicinano ragionevolmente ai punti sperimentali, come operare la scelta migliore?*

La risposta è fornita dall'applicazione di un complesso procedimento matematico che ha nome **regressione lineare** e che, fortunamente, è svolto al nostro posto da un qualunque foglio elettronico come *Microsoft Excel* o *Open Office.* Oltre a disegnare la retta, il programma ne calcola anche l'equazione e la restituisce assieme al grafico con i valori di m e q cercati (**Fig.3.8**). Per approfondimenti sull'uso del foglio elettronico, si veda al proposito il Cap. 4: "Analisi dati".

In Fig.3.8 sono rappresentate anche le cosiddette **barre d'errore**: due segmenti, uno orizzontale e uno verticale, centrati su ogni punto del grafico, il cui significato è di *rendere visibile con un intervallo di oscillazione in ascissa e in ordinata l'errore assoluto che accompagna le misure studiate* (e quindi anche la corrispondente incertezza nella posizione dei punti del grafico).

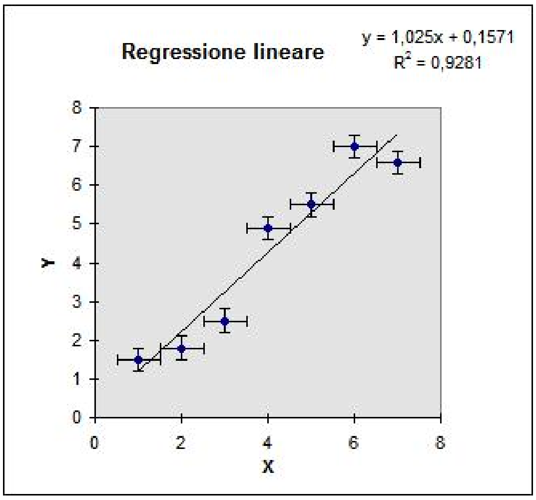

Fig.3.8 - *La retta di regressione lineare è quella che si "avvicina" il più possibile a tutti i punti sperimentali. I segmenti orizzontali e verticali sono le* **barre d'errore**.

3.5 Il metodo di "linearizzazione"

Il metodo che abbiamo appena visto si può applicare anche se i punti sperimentali non soddisfano una relazione di tipo lineare, a condizione di operare un processo di **linearizzazione.**

Supponiamo, a tal fine, di avere dei dati che siano consistenti con una relazione di tipo parabolico, espressa dall'equazione:

$$y = k\,x^2$$

Se riportiamo in un grafico cartesiano i punti corrispondenti, questi si disporranno lungo una *parabola*. Eseguiamo, però, la seguente sostituzione:

$$Z = x^2$$

Costruiamo nuovamente il grafico, ma mettendo i valori di Z sull'asse delle ascisse. Otteniamo l'equazione:

$$y = kZ$$

Questa è una *relazione di tipo lineare* tra le variabili y e Z che rende possibile l'applicazione del metodo di regressione.

Per maggior chiarezza, facciamo ora un esempio pratico: i dati riportati in tabella (Fig.3.9) sono legati da una relazione di tipo parabolico $y = x^2$, per cui, conviene ripeterlo, se disegnati in un grafico cartesiano si dispongono su una parabola e non su di una retta. Se però eseguo la sostituzione:

$$Z = x^2$$

e riporto in grafico le due variabili Z e y, i punti vanno ora a disporsi lungo una retta passante per l'origine. Si è così ottenuta *la linearizzazione di una proporzionalità che in origine era parabolica.*

Su questi valori posso ora eseguire la regressione lineare ed estrarre dalla curva il suo coefficiente angolare.

x	**y**	$\mathbf{Z = x^2}$
0	0	0
1	3	1
2	12	4
3	27	9
4	28	16
5	75	25
6	108	36

Fig.3.9 - *Linearizzazione di una relazione parabolica.*

Dalla pratica di laboratorio emergerà di volta in volta tutta l'importanza che riveste la conoscenza del coefficiente angolare e l'utilità del procedimento spiegato in queste pagine.

Infatti, se abbiamo una retta che interpola i dati sperimentali e se questi dati sono, ad esempio, la massa e il volume di un oggetto, il valore del coefficiente angolare consente di conoscere la densità. Se le misure riguardano l'allungamento di una molla e la forza applicata, il coefficiente angolare fornisce la costante elastica. Se in laboratorio si ottengono i valori di spazio e di tempo relativi ad un carrellino che si muova su di una rotaia a cuscino d'aria, il coefficiente angolare consente di conoscere il valore della velocità...

Per questo motivo è importante applicare ogni volta che è possibile il metodo di *regressione* *lineare.* Il procedimento di linearizzazione, infatti, può essere compiuto su tutti i tipi di proporzionalità che abbiamo visto, eseguendo le opportune sostituzioni.

In particolare, nel caso di una proporzionalità inversa bisogna eseguire la sostituzione:

$$Z = \frac{1}{x}.$$

Per linearizzare una proporzionalità quadratica inversa, servirà invece la relazione:

$$Z = \frac{1}{x^2}.$$

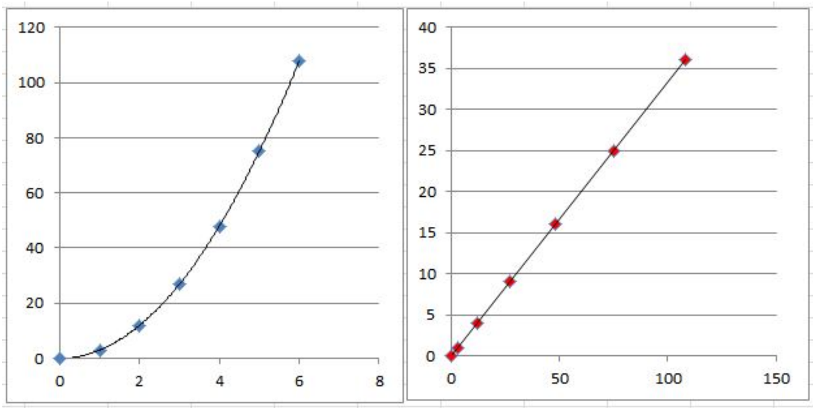

Fig.3.10 - *Linearizzazione di un grafico parabolico.*