Capitolo 5

Algebra vettoriale

5.1 Grandezze scalari

Si definiscono **scalari** *quelle grandezze fisiche che sono descritte in modo completo da un numero accompagnato dalla sua unità di misura.*

La temperatura dell'aria in una stanza, la massa di un corpo, il numero di studenti in una classe, il numero delle pagine di un libro, la lunghezza di un segmento, l'area di una superficie sono quantità perfettamente note quando si conosca il valore numerico che le esprime (ad esempio: 30 °C, 200 kg, 22 cm, 100 m^2, 30 persone ...).

Le operazioni aritmetiche con le grandezze scalari seguono le normali regole dell'algebra. Per esempio, sommando le lunghezze di 10 cm e di 25 cm relative a due segmenti adiacenti, si ottiene come risultato un segmento lungo 35 cm; aggiungendo 50 m^2 ad un'area di 200 m^2 , la superficie complessiva diventa 250 m^2; aggiungendo 50 kg a un oggetto di massa 200 kg si ottiene una massa complessiva di 250 kg.

Gli scalari, quindi, sono quelle grandezze per cui si può tranquillamente affermare che *due più due fa sempre quattro*!!

5.2 Grandezze vettoriali

Esistono invece alcune grandezze per le quali il discorso precedente non è più valido. Gli effetti di una forza, dell'accelerazione o della velocità, infatti, cambiano non solo in funzione del valore che ne esprime l'intensità, ma anche in realzione alla loro direzione e al verso.

Ad esempio, due treni che partono dalla stessa stazione alla velocità di 100 km/h lungo due differenti direzioni rettilinee, dopo lo stesso intervallo di tempo si ritroveranno in località completamente diverse tra loro, anche se all'identica distanza dal punto iniziale. Ciò vuol dire che per conoscere completamente gli effetti indotti da una grandezza fisica come la velocità, non basta conoscerne l'intensità (il *modulo*): occorre avere informazioni precise anche sulla sua *direzione* e sul suo *verso*. Grandezze di questo tipo si chiamano **vettori**; le operazioni aritmetiche che le coinvolgono non seguono le tradizionali regole algebriche e necessitano di una nuova definizione.

Ogni vettore **V** è rappresentato graficamente da un *segmento orientato* di lunghezza proporzionale al suo modulo. Qualche volta si preferisce utilizzare una lettera soprassegnata da una freccia (o da un semplice trattino): $\vec{\mathbf{V}}$. Altre volte si usa invece una lettera scritta in grassetto: **V**. Il modulo di un vettore è solitamente indicato dalla lettera in corsivo V.

Il punto iniziale del segmento che rappresenta un vettore si chiama **punto di applicazione**; quello finale, individuato dalla punta della freccia, ne stabilisce il verso.

Due vettori si dicono **consecutivi** se il punto di applicazione del secondo coincide con l'estremo del primo. Si dicono **opposti** se hanno lo stesso modulo e la stessa direzione, ma versi opposti: l'opposto di **V** è il vettore (-**V**). Due vettori **uguali**, invece, hanno lo stesso modulo, identica direzione e verso concorde.

Si chiama, infine, **versore** un vettore di modulo unitario (cioè tale che V = 1).

Vale la seguente **regola del trasporto**: *un vettore può esser traslato lungo una retta o lungo una qualunque direzione parallela a quella di partenza senza che questa operazione ne alteri il valore.*

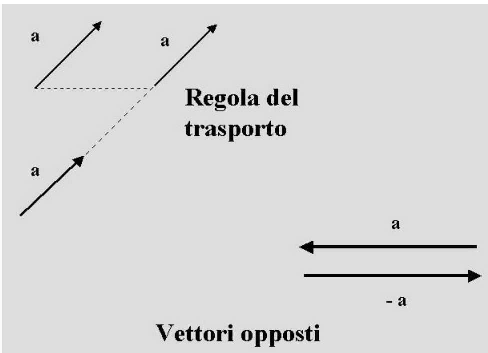

Fig.5.1 - *Regola del trasporto*

5.3 Somma e differenza di vettori

Abbiamo già anticipato come, per eseguire le operazioni algebriche con i vettori, occorrano delle nuove procedure di calcolo. Vediamo il perché, prendendo come esempio il *vettore spostamento.*

Se ci muoviamo a partire dall'origine O di un sistema di assi cartesiani eseguendo due spostamenti consecutivi di 2 *m* possiamo affermare di trovarci a una distanza di 4 *m* dal punto O al termine dell'operazione svolta? Sicuramente no! Ciò sarà vero solo se i due spostamenti avvengono nella stessa direzione e nello stesso verso. In tutti gli altri casi, la distanza tra il punto d'arrivo e quello di partenza *sarà sempre minore di 4 m.*

Ad esempio, se il secondo spostamento é diretto perpendicolarmente al primo, applicando il teorema di Pitagora otteniamo che il punto finale dista da quello iniziale solo 2,8 *m.* Se invece il secondo spostamento fosse eseguito con modulo uguale al primo, ma verso opposto, ci ritroveremmo addirittura al punto di partenza con uno spostamento totale nullo.

In definitiva, la somma di due spostamenti di modulo 2 m potrebbe dare un vettore di modulo 4 m (se gli spostamenti sono adiacenti), di modulo nullo (con spostamenti opposti), oppure di modulo pari a un qualunque valore compreso tra 0 m e 4 m. Possiamo così affermare che, *nel calcolo vettoriale, quasi mai due più due fa 4* !!

Tutto ciò ci costringe ad introdurre delle nuove procedure per le operazioni algebriche vettoriali.

Metodo punta-coda - *La somma di due o più vettori consecutivi si ottiene considerando come risultato finale il lato di chiusura della poligonale formata dai singoli vettori.*

Se i vettori non sono consecutivi possiamo sempre ricondurci, con la *regola del trasporto*, al caso sopra considerato traslando i vettori in modo tale che ognuno inizi dove finisce il precedente. Anche due vettori che abbiano lo stesso punto di applicazione possono essere disposti in modo tale da usare il *metodo punta-coda*. Se poi i vettori sono paralleli, sarà sufficiente eseguire la somma dei moduli: direzione e verso rimarranno invariati. Il vettore somma si chiama **vettore risultante R**.

Differenza di vettori - Per eseguire la differenza occorre ricordare che, se $-\mathbf{b}$ é l'opposto di un vettore **b**, i due vettori hanno allora la stessa direzione, lo stesso modulo, ma verso contrario. In tal modo possiamo calcolare la differenza tra **a** e **b**, riconducendoci alla somma tra il primo vettore e l'opposto del secondo e poi applicare il *metodo punta-coda*:

$$\mathbf{a}–\mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \tag{5.1}$$

Nel caso di **vettori paralleli** é sufficiente calcolare la differenza dei moduli: la direzione del vettore risultante rimane invariata, mentre il verso sarà determinato dal vettore di modulo maggiore.

La regola del parallelogramma - La regola del parallelogramma ci aiuta a sintetizzare questi metodi in un procedimento particolarmente semplice che permette di calcolare velocemente sia la somma che la differenza di due vettori generici **a** e **b** che abbiano lo stesso punto di applicazione.

Se infatti consideriamo il parallelogramma che ha come lati i due vettori studiati (Fig. 5.2), possiamo notare come <u>la diagonale uscente dal punto di applicazione comune</u> coincida con la direzione e il verso del vettore somma:

$$\mathbf{S} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \tag{5.2}$$

mentre <u>l'altra diagonale</u> rappresenti il vettore differenza:

$$\mathbf{D} = \mathbf{a}–\mathbf{b} \tag{5.3}$$

il cui verso é diretto dal secondo vettore **b** al primo vettore **a**.

La *regola del parallelogramma* ci permette così di rappresentare graficamente in modo molto semplice e intuitivo la direzione e il verso del vettore risultante. Per il calcolo numerico del modulo, invece, occorrono alcune considerazioni aggiuntive che saranno esposte nei prossimi paragrafi.

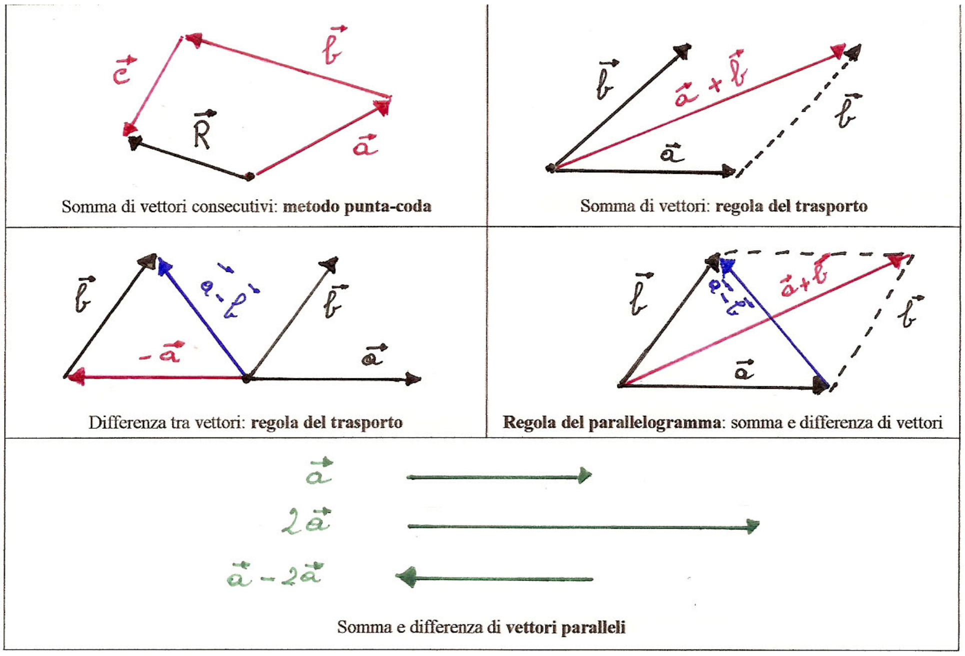

Fig.5.2 - *Somma di vettori e regola del parallelogramma.*

5.4 I triangoli notevoli

Si definiscono **notevoli** tutti quei *triangoli rettangoli* che, oltre all'angolo di 90°, hanno un angolo di 30° e l'altro di 60°, oppure due angoli di 45°.

Primo caso - Consideriamo il triangolo rettangolo ABC e supponiamo di conoscere uno dei suoi lati: ad esempio, sia AC = L. Se ora duplichiamo tale triangolo e consideriamo il suo simmetrico rispetto al segmento BC, possiamo facilmente notare che il triangolo ACD é equilatero perché tutti i suoi angoli sono di 60° (vedi Fig.5.3).
Quindi abbiamo AD = L. Ma il segmento AD é il doppio di AB per costruzione. Si ha, dunque, AB = L/2. Possiamo ora applicare il teorema di Pitagora al triangolo di partenza ABC ed ottenere la lunghezza del terzo lato: $BC = L\ \sqrt{3}/2$. Abbiamo così ricavato la lunghezza di tutti e tre i lati.

Riassumendo:

$AC = L$ (noto in partenza)

$AB = L/2$ (perché il triangolo ACD é equilatero di lato L)

$BC = \sqrt{3}/2$ (applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABC)

Secondo caso - Consideriamo ora un triangolo rettangolo con i due angoli acuti di 45°. Un tale triangolo ha i due cateti uguali, essendo isoscele su base AC. Duplicando ora la figura in modo simmetrico rispetto al lato AC, si ottiene un quadrato di lato AB = BC e di diagonale AC. Se suppongo di conoscere la lunghezza del lato AB = L, con il teorema di Pitagora posso ricavare il valore dell'ipotenusa AC (diagonale del quadrato ABCD). Per cui si ha:

$AB = L$ (noto in partenza)

$BC = L$ (perché il triangolo é isoscele)

$AC = L\sqrt{2}$ (dal teorema di Pitagora).

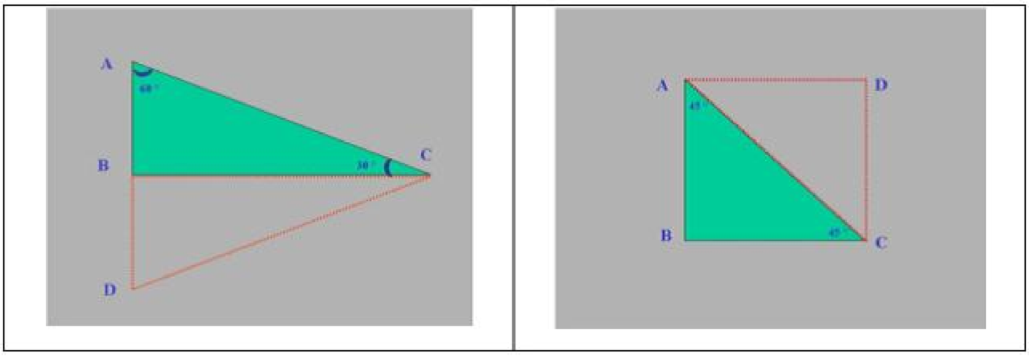

Fig. 5.3 – *Proprietà dei triangoli notevoli.*

5.5 La scomposizione di un vettore

Scomposizione lungo due direzioni qualsiasi - Consideriamo due semirette uscenti da un punto O generico e un vettore $\mathbf{a}$ applicato in O. Se si tracciano dall'estremo di $\mathbf{a}$ le parallele alle direzioni considerate, queste individuano su tali semirette due segmenti $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_2}$ che si chiamano *le componenti di* $\mathbf{a}$ *lungo le direzioni date.* Se ora attribuiamo a questi due segmenti una direzione e un verso, trasformandoli nei vettori $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_2}$, é evidente, per la regola del parallelogramma, che vale la seguente relazione:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} \tag{5.4}$$

Questo procedimento é detto *scomposizione*, e $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_2}$ sono detti i *vettori componenti* di $\mathbf{a}$.

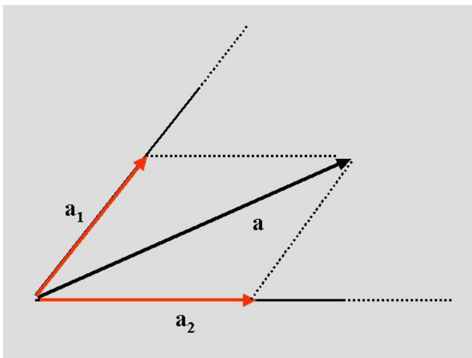

Fig. 5.4 – *Scomposizione di un vettore lungo due direzioni qualsiasi*

Scomposizione lungo due direzioni perpendicolari - Particolarmente importante é il caso in cui le due direzioni arbitrarie siano tra loro perpendicolari. Per comodità facciamo coincidere queste direzioni con gli assi cartesiani e consideriamo il punto di applicazione del vettore $\mathbf{a}$ come origine del sistema di riferimento. Le componenti $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_2}$ risultano allora essere l'*ascissa* e l'*ordinata* del punto che rappresenta l'estremo di $\mathbf{a}$. Per ottenere una rappresentazione grafica é sufficiente tracciare da questo punto le parallele alle due direzioni considerate (gli assi cartesiani).

Anche in questo caso vale la regola del parallelogramma: ogni vettore, cioè, può essere rappresentato come somma vettoriale delle sue due componenti cartesiane:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2}$$

oppure, in modo analogo:

$\mathbf{a} = \mathbf{a_x} + \mathbf{a_y}$.

Scomposizione lungo una direzione qualsiasi - Consideriamo, infine, un vettore **a** individuato in un piano cartesiano dal segmento orientato OP e una semiretta uscente dal punto di applicazione O, formante con il vettore dato un angolo α. Scomporre **a** lungo tale direzione vuol dire tracciare dall'estremo P il segmento PH *perpendicolare* alla semiretta considerata.

Definiamo *componente parallela* di **a** il segmento

$\mathrm{OH} = \mathbf{a}_{||}$

Definiamo, invece, *componente perpendicolare* di **a** il segmento:

$\mathrm{PH} = \mathbf{a}_{\perp}$.

Si noti come tra le due componenti e il vettore di partenza continui a valere la regola del parallelogramma e come la relazione che lega le due componenti perpendicolari al modulo del vettore di partenza non sia altro che il teorema di Pitagora.

Possiamo infatti scrivere:

$$a = \sqrt{a_{||}^2 + a_{\perp}^2} \tag{5.5}$$

oppure, con scrittura analoga, qualora le componenti siano indirizzate lungo gli assi cartesiani:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \tag{5.6}$$

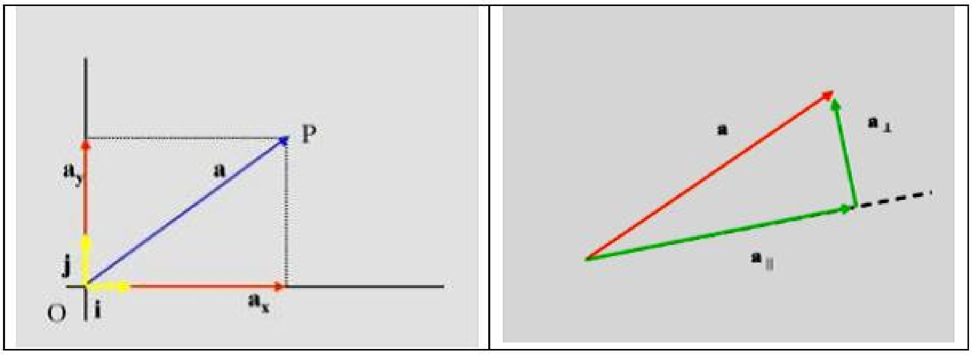

Fig. 5.5 - *Scomposizione di un vettore nelle sue due componenti lungo direzioni tra loro perpendicolari (a sinistra). Scomposizione di un vettore lungo una direzione qualunque (a destra).*

5.6 Rappresentazione cartesiana dei vettori

Il procedimento di scomposizione permette di calcolare il vettore somma **S** e il vettore differenza **D** di due vettori **a** e **b** in un modo estremamente semplice. Siano infatti:

$\mathbf{a} = \mathbf{a_x} + \mathbf{a_y}$

$\mathbf{b} = \mathbf{b_x} + \mathbf{b_y}$

due vettori generici scritti come somma vettoriale delle loro componenti cartesiane in x e y (oppure, in modo analogo, considerando la somma delle componenti parallele e perpendicolari).

E' immediato dimostrare per via grafica (Fig.5.6) che il vettore somma **S** e il vettore differenza **D** sono esprimibili attraverso la somma o la differenza algebrica delle singole componenti x e y di **a** e **b**:

$$\mathbf{S_x} = \mathbf{a_x} + \mathbf{b_x} \tag{5.7}$$

$$\mathbf{S_y} = \mathbf{a_y} + \mathbf{b_y} \tag{5.8}$$

$$\mathbf{D_x} = \mathbf{a_x} - \mathbf{b_x} \tag{5.9}$$

$$\mathbf{D_x} = \mathbf{a_x} - \mathbf{b_x} \tag{5.10}$$

Una volta che siano note le componenti cartesiane, si può rappresentare graficamente **S** e **D** utilizzando *la regola del parallelogramma.* Ed é altrettanto veloce calcolarne il modulo usando il *teorema di Pitagora*, come di seguito suggerito:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} \tag{5.11}$$

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} \tag{5.12}$$

Per determinare le singole componenti cartesiane è fondamentale saper usare le proprietà geometriche dei *triangoli notevoli,* introdotte in precedenza. Tale metodo funziona, ovviamente, solo se gli angoli tra i vettori sono di 30°, 45°, e 60°. Nel caso più generale si devono utilizzare le funzioni goniometriche e i *teoremi di risoluzione dei triangoli rettangoli*, che affermano una serie di proprietà che saranno presentate molto più avanti nel corso.

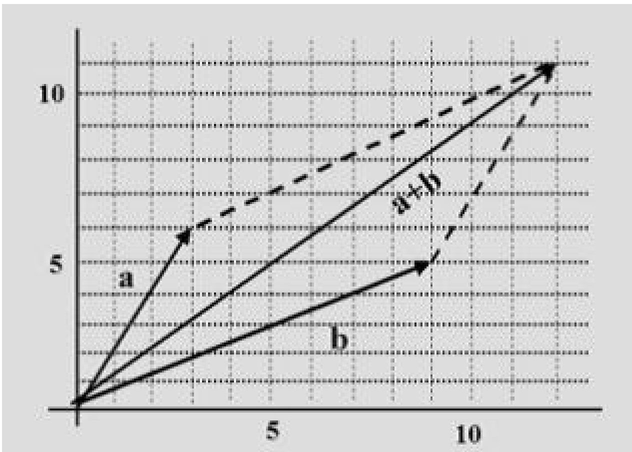

Fig. 5.6 - *Somma di vettori in rappresentazione cartesiana.*
Le componenti del vettore risultante ($\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ *) si ottengono sommando le singole componenti* x *e* y *dei vettori addendi* $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{b}$*.*