Capitolo 7

Le rotazioni e l'equilibrio

7.1 Traslazioni e rotazioni

Ricordiamo la condizione di equilibrio per la traslazione di un **corpo rigido**:

Se un corpo è in equilibrio, allora la risultante $\mathbf{R}$ *delle forze ad esso applicate deve essere nulla, cioè:*

$$\mathbf{R} = 0 \tag{7.1}$$

In tal caso l'oggetto è fermo (oppure trasla di moto rettilineo uniforme).

L'equazione (7.1) deve essere verificata per ogni direzione, in particolare per le direzioni lungo le quali si sono scomposte le forze applicate al sistema. Dovremo allora scrivere:

$$\mathbf{R}_{\parallel} = 0 \tag{7.2}$$

$$\mathbf{R}_{\perp} = 0 \tag{7.3}$$

E' immediato rendersi conto che tale condizione non é sufficiente ad assicurare l'equilibrio anche per la rotazione.

Consideriamo, per illustrare meglio il concetto, una sbarra rigida di lunghezza L. Applichiamo ai due estremi, in direzione perpendicolare alla sbarra, una **coppia di forze**, *cioé due forze* $\mathbf{F}$ *di uguale modulo, ma di verso opposto*: la loro risultante è nulla, ma la sbarra, pur non traslando, inizia a ruotare attorno ad un asse passante per il suo centro (Fig.7.1).

Se vogliamo che l'oggetto non ruoti, dobbiamo ora fare riferimento a un concetto completamente nuovo: quello di *momento di una forza rispetto ad un punto*.

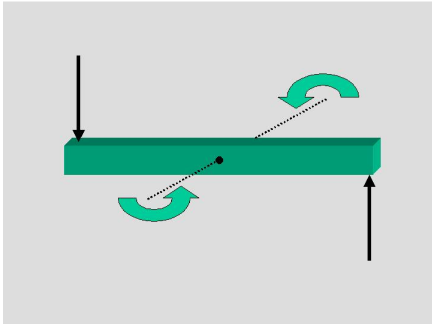

Figura 7.1: *Due forze uguali ed opposte, applicate agli estremi di una sbarra rigida, ne causano la rotazione attorno ad un asse passante per il centro. Non si ha invece traslazione perché la risultante è nulla:* $\mathbf{R} = 0$.

7.2 Momento di una forza rispetto ad un punto

Consideriamo un corpo esteso che possa muoversi di moto rotatorio attorno ad un asse: una porta attorno al suo cardine, per esempio.

Per ottenere la rotazione della porta si deve applicare una forza **F** sufficientemente intensa, ma ciò non basta. Occorre che la direzione di tale forza non intersechi quella del cardine, altrimenti il movimento non sarà possibile (vedi fig.7.4). La rotazione, quindi, non dipende solo dall'intensità della forza **F**, ma anche dall'angolo α che si viene a formare tra la direzione di **F** e il piano della porta: l'effetto risulta massimo se le due direzioni sono perpendicolari, mentre andrà diminuendo per valori minori di 90°. E ancora: la rotazione sarà tanto più evidente, a parità di forza applicata **F** e di angolo α , quanto più il punto di applicazione di **F** sarà distante dall'asse (il cardine).

Riassumendo, la rotazione di un corpo esteso dipende:

1. dall'intensità della forza **F** applicata
2. dalla distanza **r** tra il punto di applicazione di **F** e l'asse di rotazione (la retta, cioé, passante per il *polo* o il *fulcro*).[1]
3. dall'angolo α tra la direzione di **r** e la direzione di **F.**

Quando **F** e **r** sono perpendicolari, la distanza **r** si chiama *braccio della forza.*

Un esempio sperimentale può essere facilmente prodotto in laboratorio: supponiamo di agganciare una piccola sbarra di plastica ad un sostegno metallico provvisto di un perno che la lasci libera di ruotare senza attrito attorno ad esso (fig.7.2). Se il perno è situato nel centro della sbarra, il sistema è in perfetto equilibrio.

La sbarra è costruita in modo tale da presentare per tutta la sua lunghezza dei piccoli fori equispaziati a cui è possibile agganciare dei pesini campione. Tali pesini, se utilizzati, alterano la situazione di equilibrio e inducono una rotazione del sistema.

Se ora vogliamo riottenere l'equilibrio, dobbiamo distribuire i pesini in modo tale che sia realizzata questa semplice condizione: il prodotto tra il numero dei pesini utilizzati (*forza*

[1] Si ricordi che per calcolare la distanza tra un punto e una retta bisogna tracciare da tale punto il segmento di perpendicolare rispetto alla retta considerata

peso) e la loro distanza dal perno centrale (*braccio*) deve risultare uguale da ambo i lati della sbarra.

Ciò dimostra, come ci aspettavamo, che la condizione di equilibrio non è determinata solo dall'intensità delle forze applicate, ma anche dalla distanza tra il loro punto di applicazione e l'asse di rotazione.

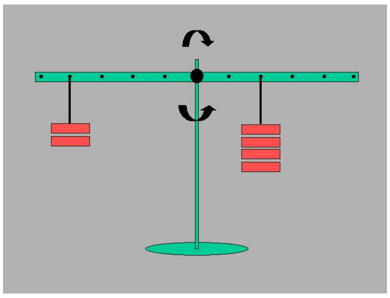

Figura 7.2: *La situazione di equilibrio della sbarra è raggiunta quando il valore numerico dell'intensità della forza applicata (numero di pesini campione) moltiplicato per la distanza tra la forza e il perno centrale attorno al quale avviene la rotazione (il "braccio") è uguale da ambo i lati.*

Nel caso dell'esempio precedente, si ha che $\alpha = 90°$, cioè $\mathbf{F} \perp \mathbf{r}$.

In questa situazione particolare, definiamo *momento* $\boldsymbol{M}$ *di una forza* $\boldsymbol{F}$ *rispetto ad un punto* $\boldsymbol{O}$ *detto polo (o fulcro)*, il prodotto tra l'intensità della forza e la lunghezza del *braccio*. In modulo:

$$M = F \cdot braccio \tag{7.4}$$

Se invece l'angolo α non è retto, dobbiamo scomporre la forza $\mathbf{F}$ lungo le direzioni rispettivamente parallela e perpendicolare ad $\mathbf{r}$. Come è facile intuire, è solo la componente perpendicolare ad avere un ruolo attivo nella rotazione, e a determinarne le caratteristiche.

La definizione del *momento di una forza* assume, in questo caso generale, la seguente espressione (in modulo):

$$M = F_{\perp} \cdot braccio \tag{7.5}$$

Il significato fisico del *momento di una forza* diventa così evidente e da ricollegarsi alla presenza di un eventuale moto rotatorio del corpo studiato. Se il suo valore è nullo, non si ha rotazione; per valori diversi da zero, invece, il corpo ruota.

Il momento è una *grandezza vettoriale*, quindi possiede anche una direzione ed un verso*: la* **direzione** *coincide con quella dell'asse di rotazione, mentre il* **verso** *è assunto di segno positivo se la rotazione è antioraria e di segno negativo se la rotazione è oraria.*

Le unità di misura del *momento* sono $[newton \cdot metro]$.

In conclusione, considerando solo il modulo di $\mathbf{M}$:

$M > 0$	rotazione antioraria
$M < 0$	rotazione oraria
$M = 0$	nessuna rotazione

7.3 Condizione di equilibrio per la rotazione

Sintetizziamo il discorso precedente, enunciando la seguente regola di carattere generale:

Se un corpo è in equilibrio per la rotazione, allora il momento totale di tutte le forze ad esso applicate è nullo. In formule:

$$\mathbf{M}_{tot} = 0 \tag{7.6}$$

dove, come abbiamo visto, nell'eseguire la somma vettoriale dei momenti, *si assume il segno positivo nel caso di una rotazione antioraria e il segno negativo nel caso di una rotazione oraria.*

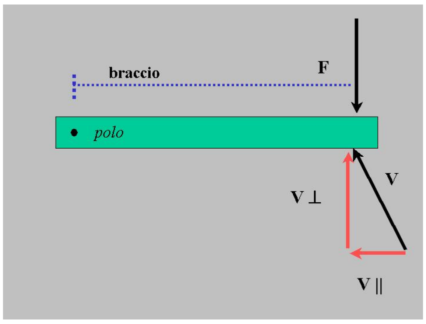

Figura 7.3: *Braccio di una forza* $\boldsymbol{F}$ *rispetto all'asse di rotazione passante per il polo. Nel caso in cui la forza non sia perpendicolare all'oggetto studiato, come per il vettore* $\boldsymbol{V}$ *in figura, è utile considerarne la componente parallela e perpendicolare. L'unico momento diverso da zero responsabile della rotazione è dato dalla componente perpendicolare della forza* $V_{\perp}$.

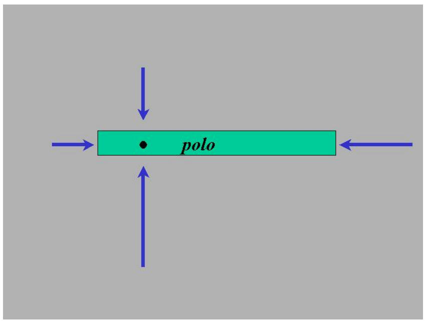

Figura 7.4: *Se la direzione di una forza passa per il polo, il momento è nullo. Nessuna delle quattro forze indicate può causare una rotazione della sbarra attorno al punto considerato.*

7.4 Le leve

Una semplice applicazione di quanto esposto in precedenza è alla base del funzionamento delle leve.

Le leve possono essere classificate in tre tipi, a seconda delle posizioni reciproche assunte dal punto attorno al quale avviene la rotazione, il **fulcro F**, dal punto di applicazione della forza esterna, la **potenza P**, e dal punto di applicazione della forza che deve essere vinta, detta **resistenza R**.

Le leve di primo genere

Nelle leve di prio genere, il fulcro F assume una posizione intermedia tra la potenza e la resistenza, vedi fig.(7.5).

Detti D_1 e D_2 i bracci delle due forze, in una situazione di equilibrio la somma dei momenti deve essere nulla. Eseguiamo i calcoli, passando dalla notazione vettoriale a quella scalare:

$$\mathbf{M_{TOT}} = 0$$

$$\mathbf{M_1} + \mathbf{M_2} = 0$$

$$PD_1 - RD_2 = 0$$

$$P \cdot D_1 = R \cdot D_2$$

Esplicitando l'equazione rispetto al modulo della potenza P, si giunge all'espressione:

$$P = R \cdot \frac{D_2}{D_1}.$$

Per vincere la resistenza R occorre quindi applicare una potenza P la cui intensità è decisa dal rapporto tra le lunghezze dei bracci D_1 e D_2.

Poichè in una leva di primo genere la posizione del fulcro F può essere più vicina alla potenza piuttosto che alla resistenza, così come può anche essere il contrario, se $D_2 > D_1$ si ha come conseguenza che la potenza applicata è maggiore della resistenza. In questo caso si dice che *la leva è svantaggiosa.* Se invece $D_2 < D_1$ l'intensità della potenza necessaria per causare la rotazione (vincendo la resistenza R) è minore di R. Si parla allora di una *leva vantaggiosa.* Una leva di primo genere, quindi, può risultare sia vantaggiosa che svantaggiosa.

Esempi di leve di primo genere sono le forbici, le tenaglie, l'altalena a dondolo, una bilancia a bracci uguali, il "piede di porco", l'apribottiglie ...

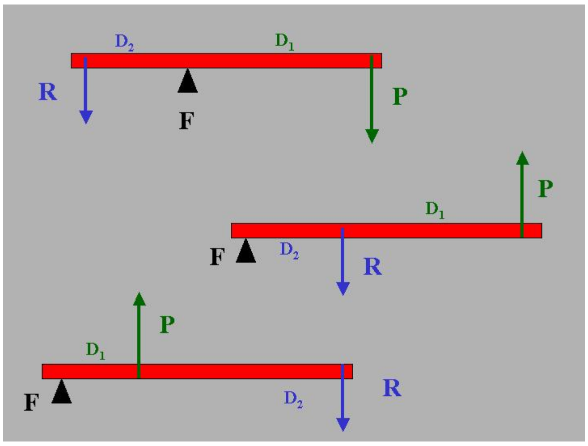

Figura 7.5: *Leve di primo, secondo e terzo genere.*

Le leve di secondo genere

Nelle leve di secondo genere è la resistenza R ad assumere una posizione intermedia.

Detti D_1 e D_2 i bracci della potenza P e della resistenza R rispetto al fulcro, la leva si trova in una situazione di equilibrio quando la somma dei momenti è nulla. Per cui vale ancora:

$$\mathbf{M_{TOT}} = 0$$

$$\mathbf{M_1} + \mathbf{M_2} = 0$$

$$PD_1 - RD_2 = 0$$

$$P \cdot D_1 = R \cdot D_2$$

Esplicitando l'equazione rispetto al modulo della potenza P, si giunge all'espressione:

$$P = R \cdot \frac{D_2}{D_1}.$$

Poiché nelle leve di secondo genere si ha sempre $D_2 < D_1$, l'intensità della potenza necessaria per vincere la resistenza R è in ogni caso minore di R. Queste leve sono *sempre vantaggiose* (cioé, $P < R$).

Esempi di leve di secondo genere sono: lo schiaccianoci, la carriola, i remi della barca, lo schiacciapatate ...

Le leve di terzo genere

Nelle leve di terzo genere è la potenza P ad assumere una posizione intermedia. Chiamati, come in precedenza, D_1 e D_2 i bracci della potenza e della resistenza, si ha all'equilibrio:

$$\mathbf{M_{TOT}} = 0$$

$$\mathbf{M_1} + \mathbf{M_2} = 0$$

$$PD_1 - RD_2 = 0$$

$$P \cdot D_1 = R \cdot D_2$$

Esplicitando l'equazione rispetto al modulo della potenza P, si giunge all'espressione:

$$P = R \cdot \frac{D_2}{D_1}.$$

Nelle leve di terzo genere, però, si ha sempre che $D_1 < D_2$. L'intensità della potenza P necessaria per vincere la resistenza R, in questo caso, è sempre maggiore di R. Queste leve sono *sempre svantaggiose* (cioé $P > R$).

Esempi di leve di terzo genere sono: le pinzette per le sopracciglia o per raccogliere piccoli oggetti come i francobolli, gli attrezzi da camino per depositare i ceppi di legno sul fuoco, le pinze del ghiaccio, la canna da pesca...

L'utilità delle leve vantaggiose è evidente: tramite l'applicazione di forze di piccola intensità, si possono vincere resistenze anche estremamente elevate. Proprio questa proprietà delle leve fece esclamare ad *Archimede,* che fu il primo a intuirne i principi e ad usarle con cognizione di causa, la celebre fase: "*...datemi un punto d'appoggio e vi solleverò il mondo* !"

Anche le leve svantaggiose, però, hanno la loro indiscutibile importanza: basti pensare alla comodità delle pinze adibite alla gestione di oggetti dalla temperatura molto alta o molto bassa come ceppi ardenti, metalli incandescenti o, più semplicemente, banali cubetti di ghiaccio.

Ma l'utilità delle leve svantaggiose non si ferma qui. Quando una leva con queste caratteristiche ruota attorno al suo fulcro, la potenza P, che ha un braccio più corto, compie un piccolo spostamento mentre la resistenza R, che ha un braccio più lungo, compie un tragitto decisamente maggiore. *Ecco allora che ciò che viene perso in termini di intensità di forze* *applicate, viene guadagnato sotto forma di spostamento.*

In definitiva, se devo sollevare una forza di grande intensità, sarà bene utilizzare una leva vantaggiosa. Se invece voglio ottenere un ampio spostamento dell'oggetto studiato, sarà sicuramente più comodo utilizzare una leva svantaggiosa.

7.5 Il baricentro

Quando si studia la rotazione di un corpo rigido esteso è di importanza fondamentale conoscere la posizione del punto di applicazione di tutte le forze interessate. Tale informazione contribuisce al calcolo dei momenti e determina le caratteristiche stesse del moto di rotazione. E' quindi fondamentale che il punto di applicazione di ogni forza, compresa la forza peso **P**, sia individuato con estrema precisione.

Ma... dove è applicata la forza peso in un oggetto esteso ??

Definizione di baricentro

Ogni corpo esteso di massa M può essere considerato come costituito dall'unione di un numero molto grande di elementi infinitesimi, ognuno di massa m_i. Ogni elemento è contraddistinto da una sua forza peso, data dal seguente vettore diretto verso il basso: $\mathbf{P}_i = m_i\mathbf{g}$. Se ora consideriamo la risultante di tutte queste infinitesime forze peso, abbiamo il vettore *forza peso* **P** dell'intero oggetto.

Si definisce **baricentro** *il punto di applicazione della risultante* ***P*** *delle singole forze peso applicate ad ogni elemento infinitesimo di massa m_i in cui posso idealmente suddividere qualunque corpo esteso.*

Il punto così trovato ha una importanza fondamentale per la statica dei corpi estesi. In pratica è come se l'oggetto intero venga considerato puntiforme con tutta la sua massa concentrata nel baricentro.

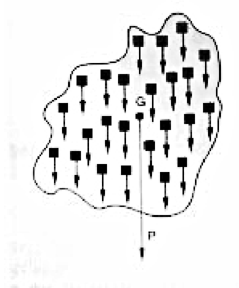

Figura 7.6: *Definizione di baricentro di un corpo esteso.*

Si pone ora il problema di individuarne la posizione.

Se il corpo in questione è omogeneo e simmetrico, il baricentro coincide semplicemente con il **centro geometrico** *dell'oggetto studiato*: in un quadrato, in un rettangolo o in un rombo esso è il punto d'incontro delle diagonali; in un triangolo, il punto in cui si intersecano le mediane; in una sfera, il suo centro... e così via.

Si noti come il baricentro può anche *non appartenere* al corpo in questione: in una ciambella circolare, ad esempio, è il centro della circonferenza, e tale punto non appartiene all'oggetto considerato!!

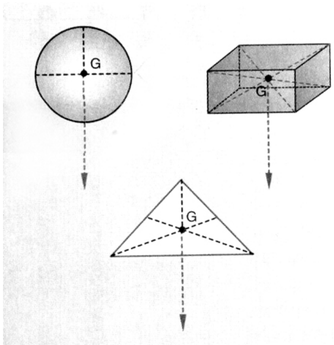

Figura 7.7: *In oggetti omogenei e simmetrici il baricentro coincide con il centro geometrico dell'oggetto (per un triangolo è il punto di incontro delle mediane).*

7.6 Determinazione sperimentale del baricentro

Consideriamo un oggetto dalla forma generica, irregolare, eterogeneo ed asimmetrico, di cui vogliamo determinare la posizione del *baricentro.*

Appendiamo l'oggetto ad una corda e lasciamolo libero di oscillare fino a che raggiunge la posizione di equilibrio. In tale situazione il *momento delle forze* in gioco rispetto al punto di sostegno (attorno al quale avviene la rotazione), è sicuramente nullo. Se così non fosse, l'oggetto si muoverebbe ancora fino a raggiungere, in una posizione diversa dall'attuale, la sua definitiva posizione di equilibrio.

Analizziamo ora le forze in gioco. Esse sono solo due: la reazione vincolare **R** del filo che sostiene il corpo, il cui punto di applicazione coincide con il punto di sostegno, e la forza peso **P**, il cui punto di applicazione, il *baricentro*, è per ora ignoto.

Poiché la direzione della forza **R** (che sostiene l'oggetto) interseca il punto attorno a cui avviene la rotazione (il polo), il suo *momento* rispetto a tale punto è nullo.

Non può essere **R**, quindi, a causare il movimento dell'oggetto per portarlo nella posizione di equilibrio. Concentriamo allora le nostre attenzioni sulla forza peso **P**.

Si consideri ora l'oggetto "dopo" che ha raggiunto la posizione di equilibrio: si disegni su di esso la retta verticale che prolunga la direzione della corda a cui l'oggetto è appeso.

Abbiamo ragione di credere che il punto di applicazione della forza peso **P**, finora completamente ignoto, debba inevitabilmente trovarsi su tale retta. Se così non fosse, infatti, il corpo non si troverebbe ancora in equilibrio, e continuerebbe a ruotare perché il momento della forza peso rispetto all'asse di rotazione (passante per il punto di sostegno della corda) sarebbe ancora diverso da zero. Essendoci equilibrio, invece, si deve avere $M = 0$: ciò può solo voler dire che la forza peso e la direzione verticale tracciata da noi in precedenza, sono sovrapposte ($\alpha = 0$): il punto di applicazione di P, quindi, si trova su tale retta, prolungamento della corda che sostiene l'oggetto. (Fig.7.8).

Si ripeta ora tutta la procedura appendendo l'oggetto ad un punto diverso dal precedente: per gli stessi motivi esposti in precedenza, quando l'oggetto raggiunge la posizione di equilibrio il punto di applicazione della forza peso deve trovarsi ancora sulla retta verticale passante per il punto di sostegno (di nuovo $M = 0$, perché $\alpha = 0$). Il punto O d'incontro tra questa retta e quella considerata in precedenza è la posizione cercata del baricentro (fig.7.8).

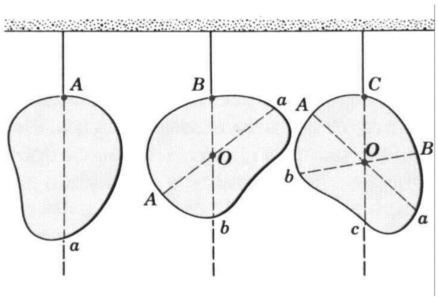

Figura 7.8: *Determinazione sperimentale del baricentro: il baricentro si trova sempre sulla verticale passante per il punto di sospensione. Se così non fosse, il momento della forza peso* $\boldsymbol{P}$ *rispetto al punto di sostegno non sarebbe nullo: l'oggetto ruoterebbe fino a raggiungere, in una posizione diversa, una definitiva configurazione di equilibrio.*

7.7 Baricentro ed equilibrio

Esistono tre tipi diversi di equilibrio di un corpo rigido esteso:

- **stabile**, se il corpo, allontanato dalla posizione di equilibrio, tende naturalmente a ritornarvi
- **indifferente**, se il corpo, allontanato dalla posizione di equilibrio, non vi ritorna, ma rimane comunque in una nuova posizione di equilibrio
- **instabile**, se il corpo, allontanato dalla posizione di equilibrio, tende ad allontanarsi sempre più da essa.

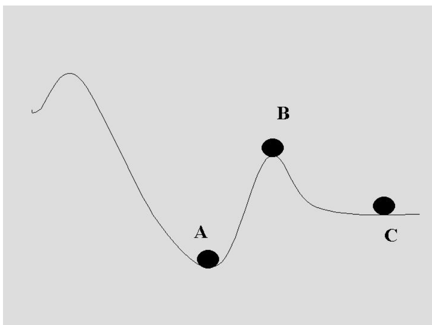

Figura 7.9: *La pallina che si muove lungo il profilo verticale rappresentato in figura, si trova in equilibrio stabile in A, in equilibrio instabile in B, in equilibrio indifferente nel tratto piano C.*

La posizione del baricentro è fondamentale per avere o meno l'equilibrio di un corpo esteso. Se ci limitiamo a considerare oggetti appesi ad un punto o appoggiati ad un piano, le considerazioni precedenti possono essere riassunte dalle seguenti affermazioni:

1) Un corpo rigido esteso **sospeso per un punto**, si trova in una posizione di equilibrio *se il baricentro si trova sulla verticale passante per il punto di sospensione.* In particolare, l'equilibrio sarà stabile se il baricentro si troverà *sotto* questo punto, e instabile se si troverà *sopra* il punto di sospensione. Se invece il corpo viene appeso proprio per il baricentro, si avrà allora una situazione di equilibrio indifferente (fig.7.10).

2) Un corpo rigido esteso **appoggiato ad un piano**, si trova in equilibrio *se la verticale passante per il baricentro cade all'interno della base d'appoggio*. In particolare, l'equilibrio risulterà essere instabile se la verticale cade proprio sul perimetro della base d'appoggio (fig.7.8).

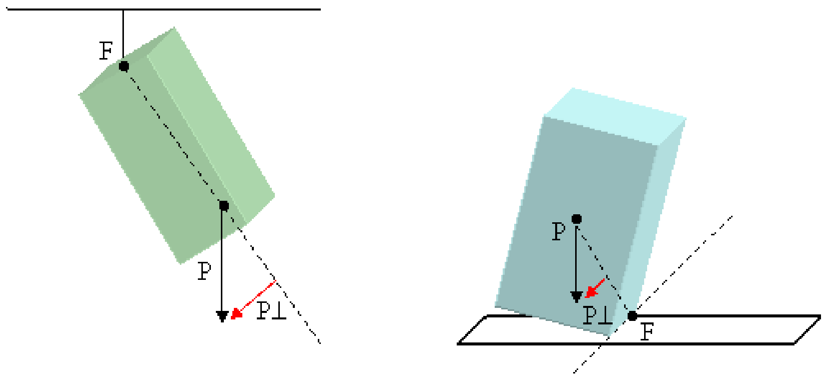

Figura 7.10: *Nei corpi appesi, se il baricentro non è allineato lungo la verticale passante per il punto F, si genera un momento dovuto alla componente perpendicolare del peso (in rosso in figura) che tende a far ruotare l'oggetto fino a quando P e F sono allineati (**a sinistra**). Nel caso dei corpi appoggiati ad un piano, se la verticale passante per il baricentro P cade all'interno della base di appoggio si genera un momento dovuto alla componente perpendicolare della forza peso (in rosso in figura) che induce una rotazione che riporta il corpo in equilibrio (**a destra**).*

A causa di queste ultime considerazioni, un corpo esteso che presenti un **baricentro molto basso**, si troverà in una condizione di equilibrio *maggiormente stabile* di un corpo analogo che presenti un baricentro in posizione più elevata. E questo perché, con un baricentro basso, bisogna alterare di molto la posizione di equilibrio del corpo per far sì che la direzione della forza peso cada al di fuori della base di appoggio dell'oggetto. Con un baricentro alto può accadere, invece, che sia sufficiente una piccola variazione di posizione rispetto alla posizione di equilibrio per creare le condizioni per il "ribaltamento" dell'oggetto.

7.8 Le carrucole

Un'utile applicazione pratica dei concetti esposti precedentemente è rappresentata dalla *carrucola*, dispositivo costituito da una ruota rigida girevole attorno ad un perno centrale. La ruota presenta una scanalatura detta *gola* dentro la quale scorre una fune. Esistono essenzialmente due tipi di carrucole, schematizzate nella figura seguente (fig.7.12): quella fissa e quella mobile.

Carrucola fissa

Indipendentemente dalle direzione della fune, e quindi della forza **F** applicata, la condizione di equilibrio alla rotazione si scrive nel consueto modo (eguagliando i *momenti delle forze*):

$$\mathbf{F} \cdot r = \mathbf{R} \cdot r$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \tag{7.7}$$

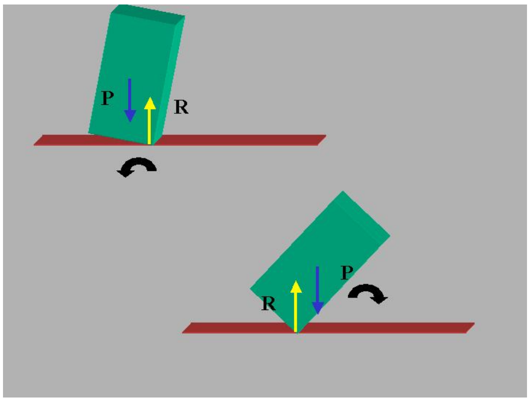

Figura 7.11: *La forza peso* $\boldsymbol{P}$ *cade all'interno della base di appoggio dell'oggetto. Il sistema è in equilibrio stabile e, perturbata di poco la posizione del corpo, esso ritorna alla situazione di partenza. Questo avviene perché l'unico momento diverso da zero rispetto al punto di rotazione (lo spigolo in basso a destra) è quello causato dalla forza* $\boldsymbol{P}$ *che induce una rotazione in senso antiorario e che riporta l'oggetto ad appoggiarsi completamente sul tavolo orizzontale. Il momento della reazione vincolare del tavolo* $\boldsymbol{R}$ *è nullo perché è applicato sullo spigolo attorno al quale avviene la rotazione (**in alto**). La forza peso* $\boldsymbol{P}$ *cade all'esterno della base di appoggio dell'oggetto. Il sistema NON è più in equilibrio. Questo avviene perché l'unico momento diverso da zero rispetto al punto di rotazione (lo spigolo in basso a destra, come nel caso precedente) è quello causato dalla forza* $\boldsymbol{P}$ *che induce ora una rotazione in senso orario e che porta l'oggetto ad allontanarsi dal tavolo di appoggio e a ribaltarsi. Il momento della reazione vincolare del tavolo* $\boldsymbol{R}$ *è nullo anche questa volta, sempre perché il vettore è applicato sullo spigolo attorno al quale avviene la rotazione (**in basso**).*

essendo r il raggio della carrucola. La situazione è simile a quella di una leva di primo genere con il fulcro in posizione perfettamente mediana. In questo caso, quindi, la potenza applicata **F** ha la stessa intensità della resistenza **R** da sollevare, e *il vantaggio è pari a 1.*

Ciò nonostante la carrucola fissa è comunque un dispositivo molto utile perché consente di *variare a piacimento la direzione della forza* applicata e ciò può risultare molto comodo in numerose situazioni reali di lavoro.

Carrucola mobile

In questo caso la condizione di equilibrio ricavata dall'eguaglianza tra i momenti delle forze diventa:

$$\mathbf{F} \cdot 2r = \mathbf{R} \cdot r$$
$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{R} \tag{7.8}$$

Il vantaggio è pari a 2. Il risultato ottenuto si spiega osservando come il fulcro attorno a cui ruota il dispositivo mobile non è più il suo centro, ma il punto di contatto tra la fune e la carrucola, cioé quel punto che si trova dalla parte opposta rispetto alla potenza **F** (osserva attentamente la posizione del fulcro nelle due carrucole disegnate in fig.7.12). La situazione è quindi analoga a quella rappresentata da una leva di secondo genere, con la resistenza posta nel punto mediano della leva.

Una interessante generalizzazione della carrucola mobile è rappresentata dal *paranco*, un congegno costituito da una opportuna alternanza di carrucole fisse e mobili.

Il vantaggio di un tale dispositivo dipende proprio dal numero di carrucole mobili utilizzate, ognuna delle quali fornisce un vantaggio pari a 2. Supponendo che queste siano n, sia ottiene:

$$vantaggio = 2 \cdot n.$$

Esiste, però, anche un altro aspetto che non deve essere sottovalutato, e che in parte è già stato accennato a proposito delle leve vantaggiose: con questi dispositivi, *ciò che si guadagna in termini di intensità di forza lo si perde sul versante dello spostamento.*

Infatti, in una leva di vantaggio 2 come in una carrucola mobile, se una forza di soli 100 N può equilibrare una resistenza di 200 N, è anche vero che per sollevare di 1 metro il corpo resistente occorre uno spostamento doppio da parte della potenza: se si vuole che la carrucola si alzi di 1 metro, ad esempio, la corda trainante deve scorrere di 2 metri...

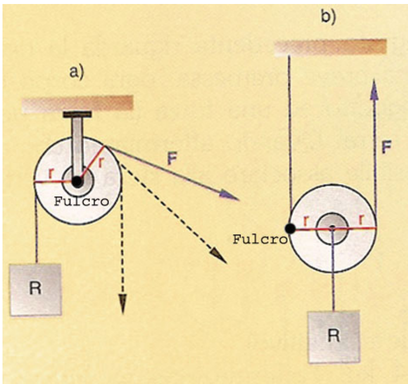

Figura 7.12: *Carrucola fissa (a sinistra) e carrucola mobile (a destra). Nella carrucola mobile il fulcro non è nel centro della ruota perché questa, salendo o scendendo lungo la fune, di fatto è costretta a ruotare attorno al punto di contatto tra fune e carrucola dalla parte opposta della potenza.*

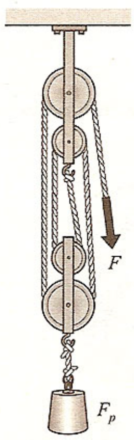

Figura 7.13: *Il paranco: un dispositivo costruito con una alternanza di carrucole fisse e mobili.*

7.9 Somma di forze parallele

Consideriamo una sottile sbarra rigida di lunghezza L = AB. Applichiamo agli estremi A e B due forze parallele $\mathbf{F}_a$ e $\mathbf{F}_b$ di diversa intensità, con $\mathbf{F}_a > \mathbf{F}_b$. Poniamoci il problema di calcolare la loro risultante **R**.

Essendo le due forze parallele, il modulo di **R** sarà ottenuto dalla somma algebrica dei moduli:

$R = F_a + F_b$.

Ma ciò non basta, perchè la sbarra, oltre a traslare, ruota.

Bisogna quindi ricavare il punto di applicazione O della risultante, in modo tale che la rotazione introdotta da **R** sia identica a quella causata dalle due forze di partenza. Consideriamo A come *polo* del sistema, cioè come punto attorno a cui valutare le rotazioni. Nell'esempio in figura, $\mathbf{F}_a$ non causa nessuna rotazione perchè il suo braccio è zero (momento nullo rispetto al punto A), mentre $\mathbf{F}_b$ dà origine a una rotazione oraria (momento negativo): per equivalenza, anche il momento di **R** deve essere negativo.

Il problema è risolvibile solo uguagliando i momenti delle forze. Detta x la distanza da A del punto di applicazione di **R**, misurata a partire dall'estremo A della sbarra, deve essere soddisfatta la seguente equazione vettoriale:

$$\mathbf{M}_{Fa} + \mathbf{M}_{Fb} = \mathbf{M}_R$$

Passiamo all'equazione scalare, ricordando che il braccio di $F_a$risulta nullo:

$$F_a \cdot 0 - F_b \cdot AB = -R \cdot x$$

$$x = \frac{F_b}{R} \cdot AB$$

Il valore di x così trovato, fornisce la posizione del punto di applicazione della risultante. Si noti come **R** risulti *più vicina alla forza di intensità maggiore* (Fig.7.14).

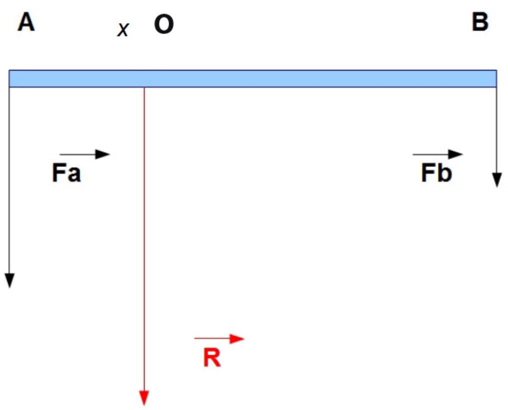

Fig.7.14 - *Somma di forze parallele.*

Analizziamo ora il caso in cui ali estremi della sbarra di lunghezza AB siano applicate due forze antiparallele.

Il modulo di **R** sarà questa volta ottenuto dalla seguente differenza:

$R = F_a - F_b$.

Come nel caso precedente, **R** deve causare una rotazione identica a quella delle due forze che sostituisce. Ciò lo si ottiene considerando l'uguaglianza dei momenti, dove x rappresenta ancora la posizione incognita del punto di applicazione di **R**, valutata a partire dall'estremo A. In questa situazione, però, il momento di $\mathbf{F}_b$ risulta positivo: ne consegue che anche **R** deve avere momento positivo (rotazioni antiorarie rispetto al punto A) e che ciò è possibile solo se il punto di applicazione O della risultante risulta esterno alla sbarra AB, dalla parte di A (Fig.7.15):

$$\mathbf{M}_{Fa} + \mathbf{M}_{Fb} = \mathbf{M}_R$$

Passando ai moduli:

$$\mathrm{F}_a \cdot 0 + \mathrm{F}_b \cdot \mathrm{AB} = \mathrm{R} \cdot x$$

$$x = \frac{F_b}{R} \cdot AB$$

Il braccio di F_a risulta sempre nullo, mentre x fornisce ancora la posizione del punto di applicazione di ***R***. *Il punto O cercato si trova dalla parte della forza di modulo maggiore.*

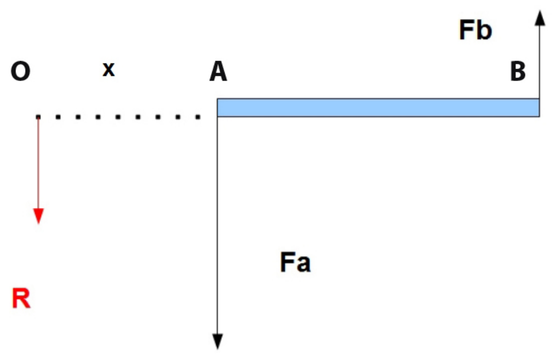

Fig.7.15 - *Somma di forze antiparallele.*

Notiamo come, in entrambi i casi analizzati, la posizione x del punto di applicazione del vettore risultante sia calcolabile sempre con la stessa espressione:

$$x = \frac{F_b}{R} \cdot AB \tag{7.9}$$

Un caso particolarmente importante di forze antiparallele si ha con la cosiddetta **coppia di forze**.

In questa situazione i moduli di $\mathbf{F}_a$ e $\mathbf{F}_b$ sono uguali e il modulo R della risultante è zero. Il denominatore dell'equazione (7.9) si annulla, e l'espressione perde di significato.

Nel caso di una coppia di forze, quindi, non è possibile ricondurre l'intero sistema ad un'unica forza **R**.