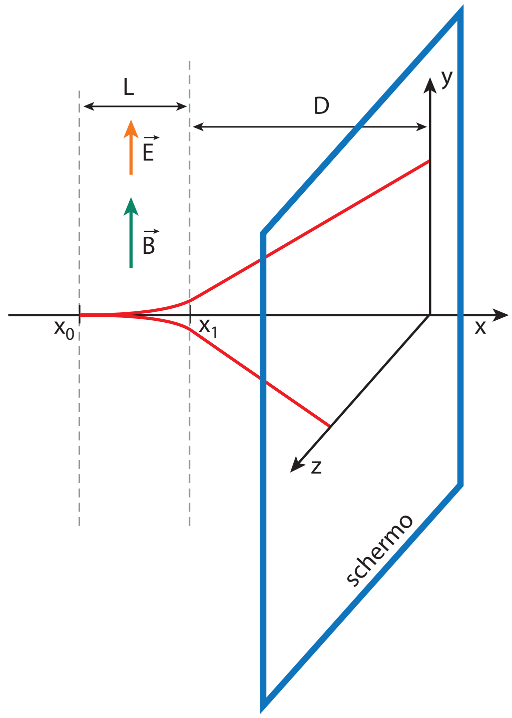
Soluzioni alla simulazione della seconda prova di Fisica
a.s. 2015/16 – 25 gennaio 2016

A cura di Gianni Melegari, Raffaele Pellicelli e Claudio Romeni

Problema 1

1.



Applicando il secondo principio della dinamica alla componente y del moto della particella si ottiene

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{qE}{m}$$

da cui la legge oraria:

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2$$

Poiché si è assunto che la forza di Lorentz, analogamente alla forza elettrica, sia sempre perpendicolare all'asse x, lungo tale asse la particella procede di moto uniforme con velocità v_0. Il tempo impiegato ad attraversare un tratto $[x_0, x]$ della regione in cui è presente il campo elettrico (essendo x_0 il punto di ingresso) è quindi:

$$t = \frac{x - x_0}{v_0}$$

Sostituendo tale espressione nella precedente legge oraria si determina l'equazione della traiettoria nel piano xy (si tratta di una parabola):

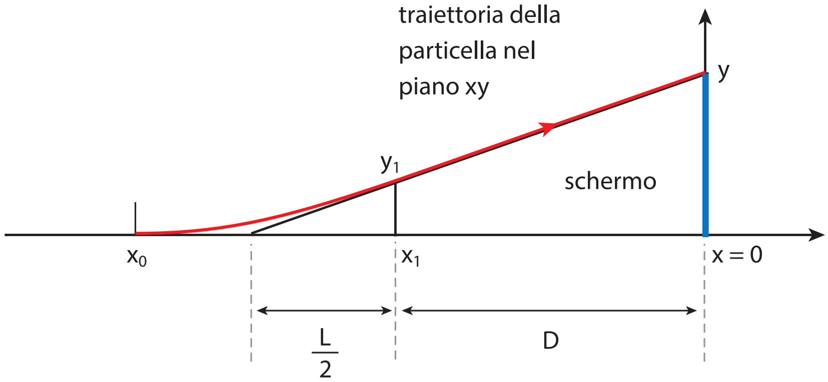
$$y = \frac{1}{2}\frac{qE}{m{v_0}^2}(x - x_0)^2$$

All'uscita dalla regione in cui è presente il campo, l'ordinata y assume perciò il valore

$$y_1 = \frac{1}{2}\frac{qE}{m{v_0}^2}(x_1 - x_0)^2 = \frac{1}{2}\frac{qEL^2}{m{v_0}^2}$$

Successivamente la particella prosegue di moto uniforme verso lo schermo lungo la retta tangente alla parabola nel punto di ascissa x_1. Per una nota proprietà della parabola, la retta tangente interseca l'asse x nel punto medio del segmento di estremi x_0 e x_1 e lunghezza L (figura a pagina seguente). Ne segue perciò che la traiettoria della particella interseca lo schermo nel punto di ordinata

$$y = \frac{D + L/2}{L/2}y_1 = \frac{1}{2}\frac{qEL(2D+L)}{m{v_0}^2} = \frac{q}{m{v_0}^2}\frac{EL(2D+L)}{2} = \frac{q}{m{v_0}^2}A_1 \qquad \left(\text{con } A_1 = \frac{EL(2D+L)}{2}\right)$$



A questo risultato si può pervenire anche in modo diretto determinando l'equazione della retta tangente alla parabola nel punto di uscita dalla regione del campo. La pendenza della tangente si ottiene calcolando la derivata della parabola nel suo punto di ascissa x_1:

$$y'(x_1) = \frac{qE}{mv_0^{\ 2}}(x_1 - x_0) = \frac{qEL}{mv_0^{\ 2}}$$

L'equazione della retta tangente alla parabola in tale punto è perciò

$$y = y'(x_1)(x - x_1) + y_1 = \frac{qEL}{mv_0^{\ 2}}(x - x_1) + \frac{1}{2}\frac{qEL^2}{mv_0^{\ 2}}$$

L'intersezione di tale retta con lo schermo si ottiene calcolando l'ordinata y della retta in corrispondenza di x=0

$$y = \frac{qEL}{mv_0^{\ 2}}(-x_1) + \frac{1}{2}\frac{qEL^2}{mv_0^{\ 2}} = \frac{qELD}{mv_0^{\ 2}} + \frac{1}{2}\frac{qEL^2}{mv_0^{\ 2}} = \frac{q}{mv_0^{\ 2}}\frac{EL(2D+L)}{2} = \frac{q}{mv_0^{\ 2}}A_1$$

Per determinare il moto della particella nel piano xz dovuto alla presenza del campo magnetico seguiamo il testo del problema e assumiamo che la forza di Lorentz sia sempre diretta lungo y. In questa ipotesi, si tratta di un moto parabolico analogo a quello dovuto al campo elettrico.(*) Utilizziamo quindi lo stesso procedimento adottato nel caso del campo elettrico sostituendo però la forza elettrica F_y=qE con la forza di Lorentz F_z=qvB. L'intersezione della corrispondente traiettoria con lo schermo si ha quindi in corrispondenza dell'ordinata:

$$z = \frac{1}{2}\frac{qv_0BL(2D+L)}{mv_0^{\ 2}} = \frac{q}{mv_0}\frac{BL(2D+L)}{2} = \frac{q}{mv_0}A_2 \qquad \left(\text{con } A_2 = \frac{BL(2D+L)}{2}\right)$$

In generale, la larghezza L della regione in cui è presente il campo e la distanza D di tale regione dallo schermo potrebbero anche essere diversi per i campi elettrico e magnetico.

(*) L'approssimazione introdotta dal testo è valida se il tratto orizzontale L percorso dalle particelle dentro il campo magnetico è molto piccolo rispetto al raggio di curvatura R=$mv_0/(qB)$ dell'orbita circolare dovuta alla forza di Lorentz.

2.

Lo schermo coincide con il piano x=0, cioè il piano yz. Poniamo z in ascissa e y in ordinata. Quando sono presenti sia il campo elettrico che quello magnetico, una particella incide sullo schermo nel punto avente coordinate

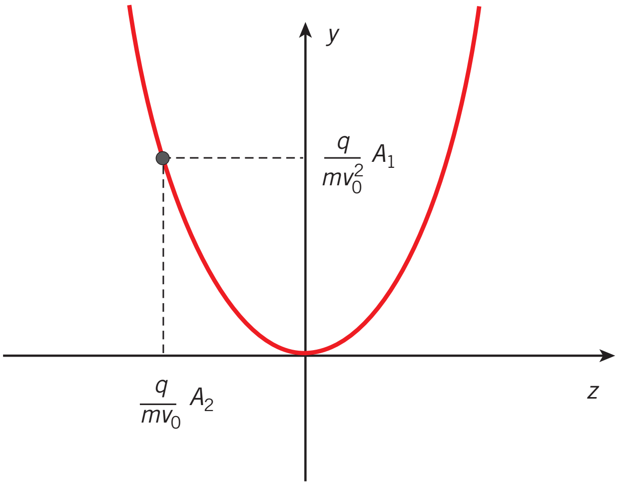
$$z = \frac{q}{mv_0} A_2 \quad \text{e} \quad y = \frac{q}{mv_0^2} A_1$$

Esplicitiamo v_0 nella prima relazione

$$v_0 = \frac{qA_2}{mz}$$

e sostituiamo il risultato nella seconda

$$y = \frac{1}{q/m} \frac{A_1}{A_2^2} z^2$$



Nel piano dello schermo, le tracce delle particelle si dispongono su parabole del tipo y=az^2, dove

$$a = \frac{1}{q/m} \frac{A_1}{A_2^2}$$

3.

Poiché a è inversamente proporzionale a q/m, all'aumentare di q/m il parametro a diminuisce e la parabola y=az^2 si allarga. Poiché il rapporto q/m è massimo per l'idrogeno, la parabola relativa allo ione idrogeno è quella più larga, cioè più esterna (la più deflessa rispetto all'asse verticale y lungo cui sono diretti i due campi) nelle figure 1 e 2 del testo del problema.

Consideriamo la parabola relativa a uno ione diverso dall'idrogeno:

$$y = \frac{1}{\bar{q}/\bar{m}} \frac{A_1}{A_2^2} z^2$$

Per calcolare il rapporto $\bar{q}/\bar{m}$ è sufficiente confrontare l'ascissa della parabola con quella dell'idrogeno in corrispondenza di uno stesso valore dell'ordinata y:

$$\frac{1}{\bar{q}/\bar{m}} \frac{A_1}{A_2^2} \bar{z}^2 = \frac{1}{q/m} \frac{A_1}{A_2^2} z^2$$

$$\frac{\bar{q}/\bar{m}}{q/m} = \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2$$

Consideriamo per esempio la parabola più stretta. Fissato un valore di y, misuriamo con il righello la larghezza della parabola scelta e quella della parabola relativa all'idrogeno (la larghezza equivale a 2z, ma poiché siamo interessati al rapporto non fa differenza):

$2\bar{z} \approx 3$ cm $\qquad 2z \approx 13$ cm

Possiamo ricavare così il rapporto

$$\frac{\bar{q}}{\bar{m}} = \left(\frac{2\bar{z}}{2z}\right)^2 \frac{q}{m} = \left(\frac{3}{13}\right)^2 \frac{q}{m} \approx 0{,}05 \frac{q}{m}$$

4.

Affinché la particella non venga deflessa e quindi incida nell'origine *O* dello schermo, occorre che la forza elettrica e quelle magnetica abbiano la stessa intensità, la stessa direzione e versi opposti. Imponendo l'uguaglianza delle intensità si ottiene:

$qE = qv_0B$

da cui si ricava la condizione per le intensità dei campi:

$E = v_0B$

Affinché le due forze abbiano versi opposti, il verso del campo elettrico deve essere opposto a quello del prodotto vettoriale $\vec{v}_0 \times \vec{B}$ e cioè il campo elettrico deve essere orientato lungo la direzione negativa dell'asse z (avendo scelto il verso positivo dell'asse y verso l'alto e quello dell'asse z in modo che i versori $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ formino una terna destrorsa).

In questa configurazione è possibile, agendo opportunamente sull'intensità di uno o di entrambi i campi, misurare la velocità della particella facendo in modo che la sua traccia non subisca deflessione e quindi incida sullo schermo nello stesso punto in cui incide quando i campi sono assenti. Dall'equazione precedente si ricava $v_0 = E/B$.

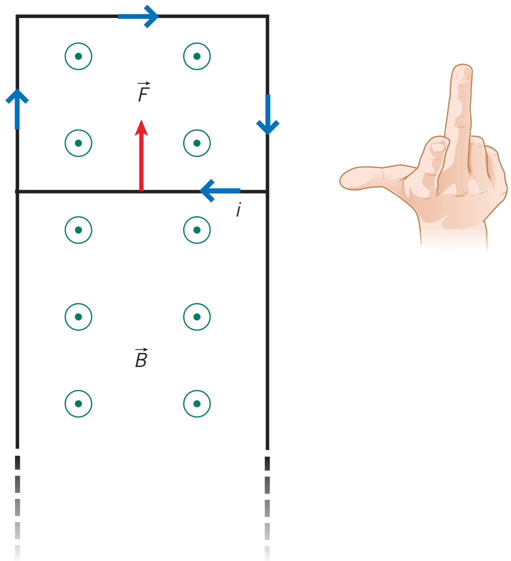
Problema 2

1.

Durante la discesa della barretta, aumenta l'area del circuito chiuso costituito dalla barretta stessa, dalla parte superiore della struttura e dalle guide laterali. Di conseguenza il flusso magnetico concatenato con tale circuito varia e si induce nel circuito una forza elettromotrice (fem) che produce una corrente elettrica. In modo equivalente si può dire che a causa della forza di Lorentz che agisce sulle cariche libere di muoversi presenti all'interno della barretta che sta scendendo, ai suoi estremi si genera una fem (a volte indicata come "fem cinetica").

Essendo percorsa da corrente elettrica, la barretta è soggetta a una forza dovuta al campo magnetico esterno. Per la legge di Lenz tale forza contrasta la causa che l'ha prodotta, per cui essa è diretta verso l'alto opponendosi così alla forza peso della barretta.

Per rendere più concreta la spiegazione, supponiamo che il campo magnetico sia uscente dal foglio del disegno. Se si orienta la perpendicolare alla superficie del circuito anch'essa uscente dal foglio, il flusso magnetico concatenato con il circuito risulta positivo e quindi aumenta mentre la barra scende. Di conseguenza, essendo il circuito orientato in senso antiorario (in accordo con la regola della mano destra), il segno negativo presente nella legge di Faraday fa sì che la fem presente in esso agisca in senso orario e quindi la corrente circoli anch'essa in senso orario. Pertanto la corrente nella barretta scorre da destra verso sinistra. Poiché la corrente e il campo magnetico giacciono su un piano orizzontale, la forza magnetica che agisce sulla barretta deve avere direzione verticale e verso determinato con la regola della mano destra (pollice=verso della corrente, indice=verso del campo magnetico, medio=verso della forza), cioè verso l'alto.



Se si assume che il campo magnetico abbia verso entrante nel foglio del disegno, l'intero ragionamento rimane invariato se si immagina di osservare i fenomeni da dietro il foglio, per cui la forza che agisce sulla barretta è ancora diretta verso l'alto.

2.

La forza-peso della barretta tende a farla scendere di moto uniformemente accelerato. Tuttavia sulla barretta agisce anche la forza magnetica che contrasta tale moto. La fem indotta nel circuito è direttamente proporzionale alla velocità di variazione del flusso magnetico e quindi alla velocità della barretta. Infatti la legge di Faraday stabilisce che (ignorando i segni)

$$\text{fem} = \frac{\Delta\Phi\left(\vec{B}\right)}{\Delta t} = B\frac{\Delta A}{\Delta t} = BL\frac{\Delta x}{\Delta t} = BLv$$

B indica il modulo del campo magnetico, A l'area del circuito, L la lunghezza della barretta e x la distanza percorsa dalla barretta scendendo a partire dalla posizione iniziale.

Se R è la resistenza del circuito, la corrente elettrica che circola in esso ha intensità

$$i = \frac{\text{fem}}{R} = \frac{BLv}{R}$$

e la forza magnetica sulla barretta è

$$F = iLB = \frac{B^2L^2v}{R}$$

La resistenza R aumenta man mano che la barretta scende, in quanto aumenta la lunghezza complessiva del circuito. Tuttavia, se si assume che la resistenza della guida sia trascurabile (come ipotizzato nel punto 3), la resistenza R coincide con quella della sola barretta e quindi può essere considerata costante. La forza magnetica che si oppone al moto risulta allora direttamente proporzionale alla velocità di discesa. La forza complessiva agente sulla barretta (m massa della barretta, g accelerazione di gravità)

$$F_{\text{tot}} = mg - \frac{B^2L^2v}{R}$$

diventa quindi sempre più piccola man mano che v aumenta.

Di conseguenza anche l'accelerazione della barretta diventa sempre più piccola e di conseguenza la velocità aumenta sempre meno, raggiungendo infine (in un tempo teoricamente infinito) un valore costante quando il modulo della forza magnetica diventa uguale a quello della forza peso. Si può pertanto concludere che il grafico corretto è il grafico 3. Se la resistenza della guida non fosse trascurabile, la lunghezza e quindi la resistenza complessiva del circuito aumenterebbero durante la discesa della barretta. Ciò avrebbe l'effetto di contrastare in parte l'aumento della forza magnetica durante la discesa.

3.

Il valore massimo della velocità corrisponde alla situazione di regime in cui la forza magnetica bilancia esattamente la forza peso. In tale situazione la barra si muove di moto rettilineo uniforme. Deve dunque essere:

$$mg = \frac{B^2L^2v}{R}$$

La velocità massima è pertanto

$$v_{\max} = \frac{mgR}{B^2L^2} = \frac{\left(30\cdot 10^{-3}\ \text{kg}\right)\left(9{,}8\ \text{m/s}^2\right)\left(2{,}0\ \Omega\right)}{\left(2{,}5\ \text{T}\right)^2\left(0{,}40\ \text{m}\right)^2} = 0{,}59\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

4.

Applicando la seconda legge della dinamica, l'equazione del moto della barretta risulta

$$a=\frac{F_{\text{tot}}}{m}=g-\frac{B^2L^2v}{mR}=g-\frac{B^2L^2}{mgR}vg=g-\frac{g}{v_{\max}}v=g-\frac{v}{\tau}\qquad\left(\text{con } \tau=\frac{v_{\max}}{g}\right)$$

ossia

$$v'(t)=g-\frac{v}{\tau}$$

Considerando la funzione velocità presente nel testo del problema

$$v(t)=v_{\max}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

e la sua derivata

$$v'(t)=-v_{\max}e^{-\frac{t}{\tau}}\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\frac{v_{\max}}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}=ge^{-\frac{t}{\tau}}$$

verifichiamo che tale funzione è una soluzione:

$$g-\frac{v}{\tau}=g-\frac{v_{\max}}{\tau}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=g-g\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=ge^{-\frac{t}{\tau}}$$

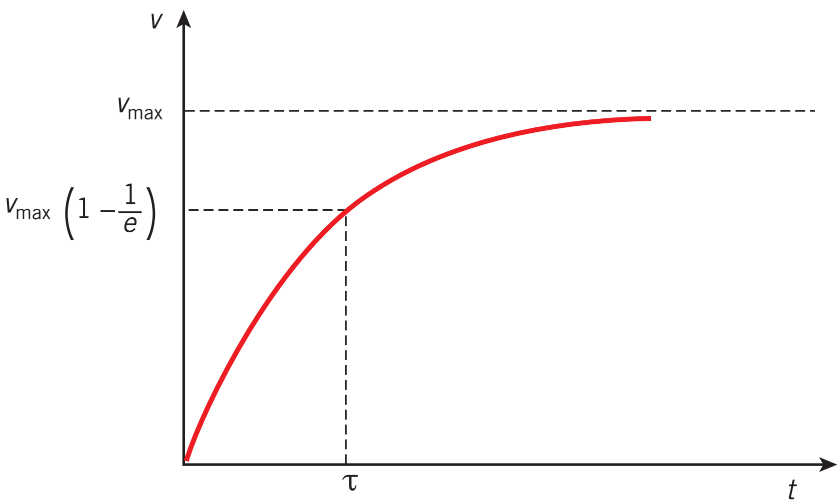
Il fattore esponenziale $e^{-t/\tau}$ presente nella velocità ha valore iniziale uguale a 1, dopo di che diminuisce tendendo al valore nullo quando il tempo tende all'infinito. Di conseguenza il fattore $(1-e^{-t/\tau})$, che ha inizialmente valore nullo, aumenta tendendo al valore 1. Perciò la velocità, che inizialmente è nulla, aumenta tendendo al valore di regime $v_{\max}$. La grandezza τ ha le dimensioni di un tempo: in particolare all'istante $t=\tau$ risulta

$$v(\tau)=v_{\max}\left(1-\frac{1}{e}\right)=0{,}63\cdot v_{\max}$$

Calcoliamo anche la velocità agli istanti $t=2\tau$ e $t=3\tau$:

$$v(2\tau)=v_{\max}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)=0{,}86\cdot v_{\max}$$

$$v(3\tau)=v_{\max}\left(1-\frac{1}{e^3}\right)=0{,}95\cdot v_{\max}$$



Ciò significa che all'istante $t=\tau$ la velocità ha raggiunto circa il 63% del suo valore di regime, mentre a $t=3\tau$ è al 95%. Il tempo τ fornisce quindi l'ordine di grandezza del tempo impiegato dalla velocità a raggiungere, praticamente, il valore massimo.

Quesito 1

La potenza emessa dalla lampadina, supposta puntiforme, si distribuisce uniformemente sulla superficie sferica avente centro nella lampadina e raggio uguale alla distanza *d*. L'intensità media della luce (o irradiamento medio) a distanza *d* è quindi esprimibile come:

$$\bar{I} = \frac{\bar{P}_e}{4\pi d^2} = \frac{k\bar{P}_a}{4\pi d^2} = \frac{0{,}020 \cdot \left(1{,}0 \cdot 10^2\ \mathrm{W}\right)}{4\pi\left(2{,}0\ \mathrm{m}\right)^2} = 4{,}0 \cdot 10^{-2}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

Il valore efficace del campo elettrico può essere calcolato ricordando la relazione

$$\bar{I} = c\bar{u} = c\varepsilon_0 {E_{\mathrm{eff}}}^2$$

da cui si deduce che

$$E_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{\bar{I}}{c\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{W/m^2}}{\left(3{,}00 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}\right) \cdot \left(8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m}\right)}} = 3{,}9\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

Il valore efficace del campo magnetico risulta

$$B_{\mathrm{eff}} = \frac{E_{\mathrm{eff}}}{c} = \frac{3{,}9\ \mathrm{N/C}}{3{,}00 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}} = 1{,}3 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{T}$$

La costante dielettrica relativa dell'aria in condizioni normali è molto vicina a 1 (a qualunque frequenza dell'onda elettromagnetica): ad esempio, per l'aria secca alla pressione di 1 atm e alla temperatura di 20 °C si ha ε_r=1,00059. Perciò si può trascurare l'effetto dell'aria sui valori dei campi e quindi dell'intensità luminosa ricevuta.

Il filamento presente nella lampadina, essendo non puntiforme, non irradia uniformemente in tutte le direzioni: data una certa distanza dal filo, l'intensità luminosa ricevuta dipende dall'angolo sotto cui è visto il filo dal punto in cui ci si trova. In particolare, esso irradia maggiormente lungo le direzioni perpendicolari al filo stesso. Lungo queste direzioni l'intensità ricevuta è maggiore della media calcolata in precedenza; lungo altre direzioni, sfavorevoli, è minore.

Quesito 2

L'area delle armature è l^2. Indicando con v la velocità di allontanamento delle armature, con $x = x_0 + vt$ la distanza tra le armature al generico istante t e con V la differenza di potenziale tra di esse, l'espressione della corrente di spostamento è

$$I_s = \varepsilon_0 \frac{\Delta\Phi_E\left(t\right)}{\Delta t}$$

dove il flusso del campo elettrico è calcolato attraverso una superficie che si trova tra le due armature del condensatore. Il flusso è

$$\Phi_E(t) = l^2 E = l^2 \frac{V}{x} = l^2 \frac{V}{x_0 + vt}$$

Siamo interessati alla corrente di spostamento nell'istante $t = 0$:

$$I_s = \varepsilon_0 \frac{\Phi_E(\Delta t) - \Phi_E(0)}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_0 l^2 V}{\Delta t}\left(\frac{1}{x_0 + v\Delta t} - \frac{1}{x_0}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 l^2 V}{\Delta t}\left(\frac{x_0 - x_0 - v\Delta t}{x_0\left(x_0 + v\Delta t\right)}\right) = -\frac{\varepsilon_0 l^2 V v}{x_0\left(x_0 + v\Delta t\right)}$$

Calcolata per $\Delta t \to 0$ si ottiene

$$I_s = -\frac{\varepsilon_0 l^2 V v}{x_0^2} = -\frac{\left(8,85\cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m}\right)\cdot\left(5,0\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}\right)^2\cdot\left(1,0\cdot 10^{3}\ \mathrm{V}\right)\cdot\left(0,10\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m/s}\right)}{\left(1,0\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}\right)^2} = -2,2\ \mathrm{nA}$$

Il quesito può essere risolto in modo più rigoroso utilizzando la derivata:

$$I_s = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E\left(t\right)}{dt} = \varepsilon_0 l^2 V \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x_0 + vt}\right) = -\varepsilon_0 l^2 V \frac{v}{\left(x_0 + vt\right)^2}$$

Calcolando in $t = 0$ si trova nuovamente

$$I_s = -\varepsilon_0 l^2 V \frac{v}{x_0^{\ 2}}$$

Quesito 3

Ricordando la relazione che lega la frequenza f e la lunghezza d'onda λ di un'onda elettromagnetica, $\lambda f = c$, scriviamo la lunghezza d'onda in funzione della frequenza:

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

I valori estremi delle bande di frequenza, essendo dei valori nominali, possono essere trattati come numeri esatti per cui il numero di cifre significative nelle lunghezze d'onda coincide con il numero di cifre significative utilizzato per esprimere la velocità della luce.

Banda FM

$$\lambda_{\text{min}} = \frac{c}{f_{\text{max}}} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{108 \cdot 10^6 \text{ Hz}} = 2,78 \text{ m}$$

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{c}{f_{\text{min}}} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{88 \cdot 10^6 \text{ Hz}} = 3,41 \text{ m}$$

Banda MW

$$\lambda_{\text{min}} = \frac{c}{f_{\text{max}}} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1600 \cdot 10^3 \text{ Hz}} = 188 \text{ m}$$

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{c}{f_{\text{min}}} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{540 \cdot 10^3 \text{ Hz}} = 556 \text{ m}$$

Banda SW

$$\lambda_{\text{min}} = \frac{c}{f_{\text{max}}} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{18,0 \cdot 10^6 \text{ Hz}} = 16,7 \text{ m}$$

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{c}{f_{\text{min}}} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{6,0 \cdot 10^6 \text{ Hz}} = 50,0 \text{ m}$$

La ricezione delle onde elettromagnetiche è meno influenzata dalla presenza degli edifici nel caso della banda MW perché le corrispondenti lunghezze d'onda sono apprezzabilmente più grandi delle dimensioni lineari tipiche degli edifici, per cui le onde possono aggirarli sfruttando il fenomeno della diffrazione. Inoltre, le onde a bassa frequenza subiscono un minore assorbimento da parte dei materiali non metallici (mattoni, sassi ecc.).

Quesito 4

Sulla base della figura presente nel testo del quesito, si presume che il problema presenti simmetria cilindrica intorno all'asse *x*, per cui il campo magnetico indotto risulta tangente alla circonferenza e di intensità uniforme lungo di essa. Assumiamo inoltre che il campo magnetico sia uniforme almeno all'interno del cerchio di raggio *R* disegnato nella figura.

Dalla legge di Ampère-Maxwell sulla circuitazione del campo magnetico ricaviamo

$$2\pi RB = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\Delta\Phi(\vec{E})}{\Delta t} = \mu_0\varepsilon_0 \pi R^2 \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

per cui

$$B = \mu_0\varepsilon_0 \frac{R}{2}\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{c^2}\frac{R}{2}\frac{\Delta E}{\Delta t} =$$
$$= \frac{1}{(3{,}00\cdot 10^8\ \text{m/s})^2}\frac{3{,}0\cdot 10^{-2}\ \text{m}}{2}\left(3{,}0\cdot 10^6\ \frac{\text{V}}{\text{m}\cdot\text{s}}\right) = 5{,}0\cdot 10^{-13}\ \text{T}$$

Il campo *B* è direttamente proporzionale alla distanza *R* dall'asse di simmetria *x*.

Quesito 5

Si considera dapprima il contributo di energia dovuto a coppie di cariche di segno opposto. Ognuno dei 4 ioni positivi ha vicino 3 ioni negativi a distanza *l*/2 (lo spigolo del cubo) e un altro ione negativo a distanza $(l/2)\sqrt{3}$ (la diagonale del cubo), per cui il corrispondente contributo all'energia è

$$U_- = 4\left[3\left(\frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0(l/2)}\right) + 1\left(\frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0(l/2)\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{8e^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\left(-3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Si considera ora il contributo di energia dovuto a coppie di cariche con lo stesso segno. Le coppie possibili di ioni dello stesso segno sono 3+2+1=6 o equivalentemente 4·3/2 (4=numero di ioni, 3=numero di vicini di ogni ione, diviso 2 per non contare due volte una stessa coppia). Due ioni dello stesso segno si trovano sempre a distanza $(l/2)\sqrt{2}$ tra loro (diagonale di una faccia del cubo). Questo vale sia per gli ioni positivi sia per quelli negativi, per cui il corrispondente contributo di energia è

$$U_+ = 2\cdot 6\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0(l/2)\sqrt{2}}\right) = \frac{8e^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

L'energia complessiva è

$$U = U_+ + U_- = \frac{8e^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{6e^2}{\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{6\cdot\left(1{,}60\cdot10^{-19}\ \mathrm{C}\right)^2}{\pi\cdot(8{,}85\cdot10^{-12}\ \mathrm{F/m})\cdot(0{,}567\cdot10^{-9}\ \mathrm{m})}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{-4{,}74\cdot10^{-18}\ \mathrm{J}}{1{,}60\cdot10^{-19}\ \mathrm{J/eV}} = -29{,}6\ \mathrm{eV}$$

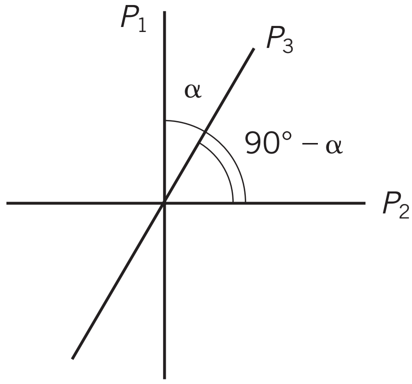
L'energia per ione è perciò

$$\bar{U} = \frac{U}{8} = -3{,}70\ \mathrm{eV}$$

La percentuale rispetto al valore sperimentale dell'energia di legame risulta

$$\frac{3{,}70\ \mathrm{eV}}{4{,}07\ \mathrm{eV}}\cdot100 = 90{,}9\ \%$$

Quesito 6



Se I_1 è l'intensità (o irradiamento) dell'onda elettromagnetica uscente dal polarizzatore P_1, per determinare l'intensità dell'onda uscente dal polarizzatore intermedio P_3 usiamo la legge di Malus:

$$I_3 = I_1\cos^2\alpha$$

in cui l'angolo α può sempre essere considerato (eventualmente sostituendolo con l'angolo 180°–α) compreso tra 0° e 90°. Allo stesso modo ricaviamo l'intensità uscente dal polarizzatore finale P_2:

$$I_2 = I_3\cos^2\left(90° - \alpha\right) = I_1\cos^2\alpha\cdot\cos^2\left(90° - \alpha\right)$$

il cui valore è sicuramente diverso da zero se α è diverso da 0° e da 90°. Ricordando che cos(90°–α) = sen α, l'espressione precedente diventa

$$I_2 = I_1\cos^2\alpha\cdot\mathrm{sen}^2\,\alpha = I_1\left(\cos\alpha\cdot\mathrm{sen}\,\alpha\right)^2 = I_1\left[\frac{1}{2}\mathrm{sen}\left(2\alpha\right)\right]^2 = \frac{I_1}{4}\mathrm{sen}^2\left(2\alpha\right)$$

L'intensità massima si ottiene perciò quando è massimo il valore di $\mathrm{sen}^2(2\alpha)$. Poiché 2α è compreso tra 0° e 180° e quindi sen(2α) è positivo, ciò significa che deve essere massimo sen(2α): il valore massimo di $\mathrm{sen}(2\alpha)$ è ovviamente 1 e tale valore si ottiene quando 2α=90°, ossia α=45°.

In corrispondenza di α=45° l'intensità uscente da P_2 risulta $I_2 = I_1/4$, in accordo con il fatto che ogni rotazione di 45° dimezza l'intensità dell'onda. Il quesito chiede di esprimere l'intensità uscente rispetto a quella (I_0) dell'onda non polarizzata. Poiché l'onda incidente su P_1 è non polarizzata, l'onda che esce da P_1 ha intensità $I_1 = I_0/2$ (si ricava calcolando il valor medio della funzione $\cos^2$) e l'onda che esce da P_2 ha intensità

$$I_2 = \frac{I_1}{4} = \frac{I_0/2}{4} = \frac{I_0}{8}$$