

Soluzioni dell'esempio di prova di fisica pubblicato dal MIUR il 12 gennaio 2017

A cura di Steave Selvaduray e Gianni Melegari
© Zanichelli 2017

Problema 1

1) Quando il magnete cade nel tubo di plexiglas si assiste a una variazione del flusso magnetico nelle due spire metalliche montate sul tubo. Di conseguenza, per la legge dell'induzione elettromagnetica, si generano nelle due spire due forze elettromotrici che determinano la circolazione delle correnti i_1 e i_2 .

Queste correnti indotte generano un campo magnetico, sostanzialmente localizzato all'interno del tubo che, per la legge di Lenz, si oppone alla causa che l'ha prodotto, cioè alla discesa del magnete nel tubo.

Di conseguenza, il campo magnetico indotto genera una forza \vec{F} sul magnete, che possiamo chiamare resistenza passiva, opposta alla sua forza peso \vec{P} . Siccome il modulo della variazione di flusso del campo magnetico generato dal magnete è legato alla velocità di caduta di tale corpo, allora anche le correnti dipendono dalla velocità di caduta; in effetti, dalla legge di Ohm, applicata a una delle due spire, si ha la seguente relazione:

$$|i| = \frac{|\mathcal{E}|}{R},$$

dove \mathcal{E} e i sono rispettivamente la forza elettromotrice e la corrente relative a una spira. Ora, l'applicazione della legge dell'induzione elettromagnetica fornisce:

$$|i| = \frac{1}{R} \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| \quad (1)$$

Da tale relazione, si deduce che il modulo della corrente è in relazione con la velocità di caduta. Di conseguenza, il modulo del campo magnetico indotto dalle due spire metalliche è legato alla velocità di caduta. Di qui, il legame fra resistenza passiva e velocità di caduta.

Riportiamo di seguito le correnti che circolano nelle due spire metalliche sia nel caso in cui la polarità nord si trova più in basso rispetto a quella sud, sia nel caso inverso.

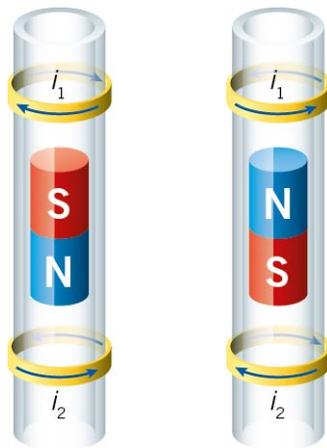


Figura 1

Figura 2

Durante la fase di accelerazione del magnete, il modulo della variazione temporale di flusso aumenta con la velocità di caduta del magnete, di conseguenza, per la relazione (1), i moduli delle correnti nelle due spire aumentano con l'aumentare della velocità.

Con riferimento alla figura 1 e alla spira in basso (denominata spira 2), la variazione di flusso del campo magnetico attraverso la superficie della spira, con vettore di superficie \vec{S}_2 diretto verso il basso, è positiva poiché il magnete, cadendo verso il basso, provoca un aumento del campo magnetico verso il basso.

Di conseguenza, per la legge di Lenz, la forza elettromotrice, e quindi anche la corrente i_2 , lungo la spira 2, sono negative; quindi, per la regola della mano destra, la corrente è diretta nel verso antiorario.

Sempre in relazione alla figura 1, consideriamo la spira metallica in alto (denominata spira 1), la variazione di flusso del campo magnetico attraverso la superficie della spira, con vettore di superficie \vec{S}_1 diretto verso il basso, è negativa poiché il magnete, cadendo verso il basso, provoca una diminuzione del campo magnetico verso l'alto.

Di conseguenza, per la legge di Lenz, la forza elettromotrice, e quindi anche la corrente i_1 , lungo la spira 1, sono positive; quindi, per la regola della mano destra, la corrente è diretta nel verso orario.

Nella figura 2, in cui il magnete viene rovesciato, con un ragionamento perfettamente analogo a quanto visto in precedenza, le correnti nelle due spire hanno i versi scambiati rispetto a quelli presentati nella figura 1.

2) Ricordiamo che la velocità media v_i del magnete nell'intervallo di tempo $[0, \Delta t_i]$ è data da:

$$v_i = \frac{h_i}{\Delta t_i}, \quad i = 1, \dots, 9,$$

dove:

$$h_1 = 5,0 \text{ cm}, h_2 = 10,0 \text{ cm}, \dots, h_9 = 80,0 \text{ cm},$$

$$\Delta t_1 = 0,5 \text{ s}, \Delta t_2 = 0,9 \text{ s}, \dots, \Delta t_9 = 5,7 \text{ s}.$$

Dal testo risulta, inoltre, che l'incertezza δh relativa all'altezza è 0,1 cm mentre quella, indicata con δt , vale 0,1 s. Di conseguenza, l'incertezza relativa $\frac{\delta v_i}{v_i}$ sul valore v_i della velocità, è data da:

$$\frac{\delta v_i}{v_i} = \frac{\delta h}{h_i} + \frac{\delta t}{\Delta t_i},$$

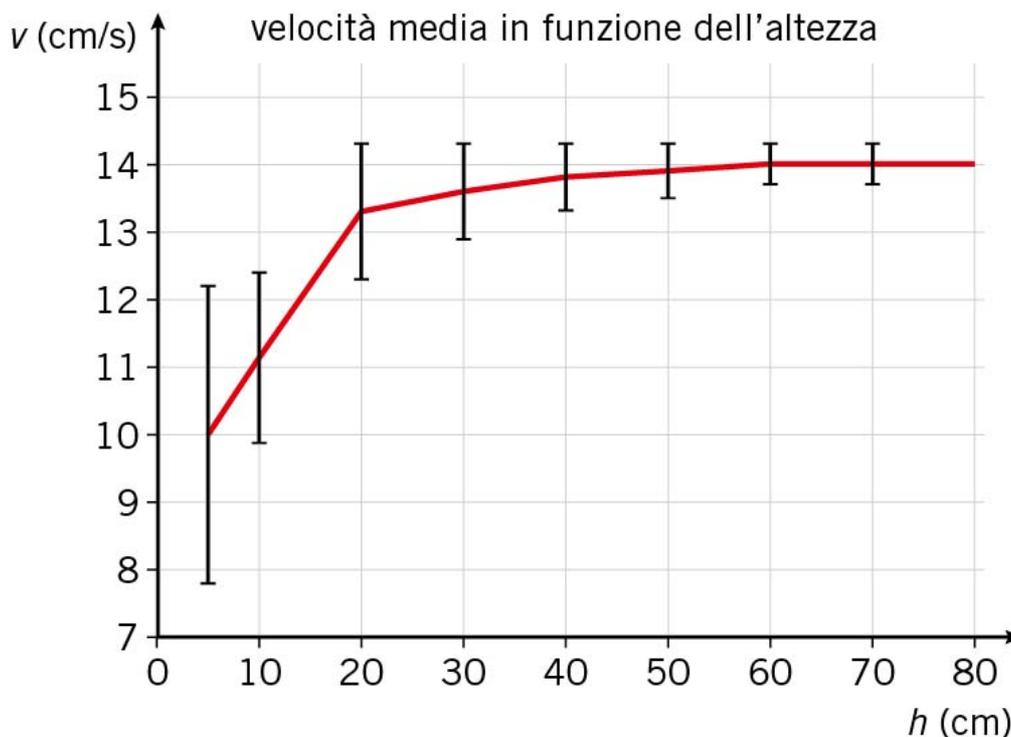
da cui si deduce l'incertezza assoluta δv_i sul valore v_i :

$$\delta v_i = v_i \left[\frac{\delta h}{h_i} + \frac{\delta t}{\Delta t_i} \right].$$

A questo punto è possibile riportare la seguente tabella delle velocità medie con le relative incertezze assolute:

h_i (cm)	Δt_i (s)	v_i (cm/s)	δv_i (cm/s)
5,0	0,5	10,0	2,2
10,0	0,9	11,1	1,3
20,0	1,5	13,3	1,0
30,0	2,2	13,6	0,7
40,0	2,9	13,8	0,5
50,0	3,6	13,9	0,4
60,0	4,3	14,0	0,3
70,0	5,0	14,0	0,3
80,0	5,7	14,0	0,3

Segue il grafico della velocità media di caduta del magnete in funzione dell'altezza di caduta.



L'analisi del grafico permette di osservare che la velocità media cresce fino all'altezza di 30 m, superata la quale la velocità media tende ad assumere il valore costante di $1,4 \cdot 10 \text{ cm/s}$ con errore $\pm 0,3 \text{ cm/s}$. Di conseguenza, tale valore di velocità può essere assunto come il valore limite della velocità di caduta e verrà indicato con v_{lim} .

Introducendo un riferimento verticale con asse orientato verso il basso, dall'applicazione del secondo principio della dinamica al moto di caduta del magnete si ottiene:

$$mg - kv = ma \quad (2)$$

dove a è l'accelerazione del magnete. Il primo membro è costituito da due termini di segno opposto: quello positivo è costante e determina un aumento della velocità mentre quello negativo diventa via via più piccolo con l'aumentare della velocità. Di conseguenza, deve esistere un valore di velocità che indicheremo con v_{lim} , per cui il primo membro di (2) si annulla; tale velocità ha la seguente espressione:

$$v_{lim} = \frac{mg}{k}.$$

Posto:

$$v(t) = v_{lim}, \text{ per } t > t^*,$$

si deduce che tale funzione soddisfa, l'equazione (2); di conseguenza, per ragioni di unicità, $v(t)$ è la soluzione dell'equazione (2) per $t > t^*$. Dunque, dopo il tempo t^* , il magnete segue un moto rettilineo uniforme di caduta verticale.

Conoscendo il valore sperimentale di v_{lim} , è possibile determinare il valore numerico di k ; infatti, si ha:

$$k = \frac{mg}{v_{lim}} = 1,65 \cdot 10^2 \text{ g/s},$$

dove abbiamo assunto per l'accelerazione di gravità il seguente valore:

$$g = (980 \pm 1) \text{ cm/s}^2.$$

Determiniamo, per ragioni di completezza, l'errore assoluto δk :

$$\delta k = k \left(\frac{\delta m}{m} + \frac{\delta v_{lim}}{v_{lim}} + \frac{\delta g}{g} \right) = 4 \text{ g/s}.$$

3) Durante la fase di accelerazione si ha una conversione dell'energia potenziale gravitazionale del magnete in energia cinetica, in energia magnetica immagazzinata nel tubo di rame e in scambio di calore. Più precisamente, a causa del fenomeno dell'induzione elettromagnetica, il tubo di rame viene percorso da corrente.

Di conseguenza, siccome il rame possiede una resistività, parte dell'energia potenziale gravitazionale del magnete verrà dissipata, per effetto Joule, attraverso uno scambio di calore.

Inoltre, siccome il tubo di rame viene percorso da corrente, allora questo genera un campo magnetico indotto sostanzialmente localizzato all'interno di esso. Come è noto, nella regione in cui

è presente il campo magnetico (indotto) è immagazzinata energia magnetica, generata, dunque, a spese dell'energia potenziale gravitazionale del magnete.

Invece, durante la fase di caduta uniforme l'energia cinetica del magnete rimane costante. Inoltre dalla (1) deriva che la corrente i rimane costante, e quindi anche l'energia immagazzinata nel campo magnetico creato all'interno del tubo non varia nel tempo. Quindi, in questa fase, l'energia potenziale gravitazionale viene dissipata attraverso uno scambio di calore per effetto Joule, a causa della presenza di una corrente che circola nel tubo verticale di rame.

Quando il magnete raggiunge l'altezza di caduta $h = 80,0$ cm, la variazione ΔE di energia meccanica è data da:

$$\Delta E = mgh - \frac{1}{2}mv_{lim}^2 = 1,84 \cdot 10^{-2} \text{ J},$$

mentre l'errore assoluto relativo all'energia vale:

$$\delta(\Delta E) = mgh \left[\frac{\delta m}{m} + \frac{\delta g}{g} + \frac{\delta h}{h} \right] + \frac{1}{2}mv_{lim}^2 \left[\frac{\delta m}{m} + 2 \frac{\delta v_{lim}}{v_{lim}} \right] = 3 \cdot 10^{-4} \text{ J}.$$

Dunque, la perdita di energia meccanica ΔE si ritrova in parte in energia magnetica immagazzinata nel tubo di rame e nella restante parte viene dissipata attraverso uno scambio di calore per effetto Joule.

4) Assumiamo che, dopo il raggiungimento della velocità limite v_{lim} da parte del magnete, l'energia del campo magnetico all'interno del tubo di plexiglas indotto dalle due spire conduttrici di rame, non vari in modo apprezzabile.

Di conseguenza, la perdita di energia potenziale gravitazionale ΔE_p si trasforma integralmente, per effetto Joule, attraverso uno scambio di calore ΔW ; dunque, si ha:

$$\Delta E_p = \Delta W.$$

Dividendo la relazione precedente per Δt , si ha:

$$\frac{\Delta E_p}{\Delta t} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (3)$$

Essendo $\frac{\Delta W}{\Delta t}$ la potenza dissipata per effetto Joule, allora, indicando con I il valore assoluto della corrente che circola in entrambe le spire, si ottiene:

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = 2RI^2,$$

dove $2R$ rappresenta la resistenza totale delle due spire.

Ora, essendo:

$$\Delta E_p = mg\Delta h,$$

dove Δh è la variazione di altezza nel tempo Δt , si deduce:

$$\frac{\Delta E_p}{\Delta t} = mg \frac{\Delta h}{\Delta t} = mgv_{lim}.$$

Di conseguenza la (3) diventa:

$$mgv_{lim} = 2RI^2 \quad (4)$$

da cui segue:

$$I = \sqrt{\frac{mgv_{lim}}{2R}} = 1,3 \text{ A.}$$

Siccome ciascuna spira ha la medesima resistenza e viene attraversata dallo stesso valore assoluto di corrente, allora, grazie alla legge di Ohm, è possibile affermare che le spire sono soggette allo stesso valore assoluto \mathcal{E} di forza elettromotrice. D'altra parte, per la legge dell'induzione elettromagnetica, \mathcal{E} è anche uguale al valore assoluto $\left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right|$ della variazione di flusso, in ciascuna spira, rispetto alla variazione di tempo. Di conseguenza, si ha:

$$\left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = \mathcal{E} = RI = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ V.}$$

Osserviamo innanzitutto che, a parità di condizioni geometriche, l'alluminio ha una resistenza maggiore di quella del rame. Quando i magneti raggiungono nei due tubi la velocità limite, le due forze resistenti

prodotte dai campi magnetici indotti nei tubi, essendo uguali alla forza peso, sono uguali fra loro. Di conseguenza, possiamo assumere identici i campi magnetici indotti dai tubi durante i moti di caduta verticale rettilinea uniforme dei due magneti. Ora, poiché i campi magnetici indotti dai tubi sono prodotti dalle correnti indotte dai magneti nei tubi, allora possiamo assumere uguali tali correnti. La generalizzazione della formula (4) al caso del tubo conduttore porta direttamente alla seguente relazione:

$$mgv_{lim} = RI^2,$$

dove R e I sono rispettivamente la resistenza del tubo e il valore assoluto della corrente elettrica che circola nel tubo. Di conseguenza, si ha:

$$v_{lim} = \frac{RI^2}{mg}.$$

Siccome I è identica nei due cilindri, allora la velocità limite è maggiore nel tubo di alluminio poiché è maggiore la sua resistenza.

Problema 2

1) Il modello atomico di Bohr prevede che, nell'atomo di idrogeno, l'elettrone possa descrivere un'orbita circolare il cui raggio appartiene alla seguente successione:

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dove h è la costante di Planck, ε_0 è la costante dielettrica nel vuoto, mentre m e $-e$ sono rispettivamente la massa e la carica dell'elettrone.

In corrispondenza dell'orbita circolare di raggio r_n , l'elettrone possiede la seguente energia:

$$E_n = -\frac{m e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

Quando l'elettrone passa dall'orbita di raggio r_n a quella di raggio r_m , con $n > m$, allora viene emesso un fotone, la cui energia $h\nu$ (ν è la frequenza della radiazione emessa) risulta essere data dalla variazione di energia dell'elettrone:

$$h\nu = \frac{m e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Ricordando il legame fra ν e la lunghezza d'onda λ , si ottiene:

$$\frac{1}{\lambda(m, n)} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad m, n \text{ interi con } n > m,$$

dove $R_H = \frac{m e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^3 c}$ è la costante di Rydberg. Di conseguenza, questa formula fornisce le lunghezze d'onda delle righe dello spettro dell'atomo di idrogeno; dunque, al variare di m si ottengono le varie serie dello spettro dell'idrogeno:

serie di Lyman ($m = 1$), serie di Balmer ($m = 2$), serie di Paschen ($m = 3$), ecc. Una proprietà notevole di queste serie è che esse sono separate, cioè non esiste una coppia di interi distinti m, m' per cui risulta possibile determinare tre interi n, n'_1, n'_2 tali che:

$$\lambda(m', n'_1) \leq \lambda(m, n) \leq \lambda(m', n'_2).$$

Inizialmente, si potrebbe supporre che le righe di Pickering siano appartenenti allo spettro di idrogeno. Tuttavia, ciò non è possibile poiché dalla tabella proposta in 2) emerge che le righe di Pickering non appartengono allo spettro di Balmer e inoltre non possono appartenere allo spettro dell'idrogeno poiché non sono separate dallo spettro di Balmer. Infatti, la lunghezza d'onda 486,1 nm (vedere tabella) è compresa fra le prime due righe di Pickering.

Dunque, le righe scoperte dall'astronomo americano non sono righe dello spettro dell'idrogeno e quindi sono le righe di emissione di altri elementi. In analogia, alla spiegazione data da Bohr relativa allo spettro dell'idrogeno, si può immaginare che le righe di Pickering siano dovute alla transizione degli elettroni nelle orbite di questi elementi incogniti.

2) Dalla formula di Balmer possiamo ottenere l'espressione della costante di Rydberg:

$$R_H = \frac{1}{\lambda \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)}, \quad n = 3, 4, \dots$$

Di conseguenza, utilizzando la formula precedente, possiamo costruire la seguente tabella:

n	λ (nm)	R_H (m^{-1})
3	656,3	$1,097 \cdot 10^7$
4	486,1	$1,097 \cdot 10^7$
5	434,1	$1,097 \cdot 10^7$
6	410,2	$1,097 \cdot 10^7$
7	397,0	$1,097 \cdot 10^7$

Dalla tabella è possibile desumere sperimentalmente la costante di Rydberg; essa vale $1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$.

Per verificare la correttezza della deduzione di Pickering, ricaviamo n dalla formula di Balmer:

$$n = \sqrt{\frac{4\lambda R_H}{\lambda R_H - 4}}$$

Di conseguenza, la deduzione dell'astronomo americano è corretta se per ogni lunghezza d'onda λ di Pickering, il numero n è semintero e quindi $2 \sqrt{\frac{4\lambda R_H}{\lambda R_H - 4}}$ è intero. Costruiamo la seguente tabella:

λ (nm)	$2 \sqrt{\frac{4\lambda R_H}{\lambda R_H - 4}}$
455,1	8,971
541,1	7,004
1012,3	5,001

Se i valori della seconda colonna della tabella vengono rappresentati con due cifre significative, allora l'ipotesi di Pickering è corretta.

3) Dobbiamo dimostrare che la relazione:

$$\frac{1}{\lambda} = 4R_H \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad n_2 > 4,$$

permette di ricostruire, per particolari valori di n_2 , sia la serie di Balmer che le tre righe di Pickering.

Scegliendo $n_2 = 2n$ (con $n > 2$, in tal modo $n_2 > 4$), la relazione precedente diventa quella di Balmer; infatti, si ha:

$$\frac{1}{\lambda} = 4R_H \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{(2n)^2} \right) = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n > 2.$$

In base a quanto visto in 2), le righe di Pickering sono contenute nella seguente serie:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(n/2)^2} \right), \quad \frac{n}{2} > 2.$$

Una semplice manipolazione algebrica di tale serie porta alla serie:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{2^2}{n^2} \right) = 4R_H \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right);$$

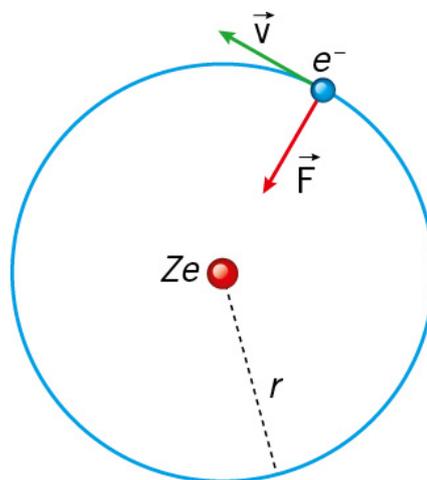
di conseguenza, anche le tre righe di Pickering sono contenute nella serie introdotta all'inizio di questo punto.

4) Consideriamo ora uno ione idrogenoide, ovvero uno ione costituito da un solo elettrone e da un nucleo costituito da Z protoni (con Z intero non nullo). In sostanza, estendendo il modello di Bohr ad un atomo idrogenoide, dobbiamo ricavare una formula del seguente tipo:

$$\frac{1}{\lambda(m, n)} = R'_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad m, n \text{ interi con } n > m,$$

dove λ è la lunghezza d'onda del fotone emesso quando l'elettrone passa dal livello energetico n a quello m .

L'elettrone che descrive una circonferenza di centro nel nucleo e di raggio r , è soggetto ad una forza elettrostatica \vec{F} da parte del nucleo di carica Ze .



Quindi, l'energia totale dell'elettrone è data da:

$$E = U + K,$$

dove U e K sono rispettivamente l'energia elettrostatica e quella cinetica dell'elettrone. Ricordiamo le seguenti relazioni:

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}, \quad K = \frac{1}{2}mv^2.$$

L'eguaglianza fra la forza centripeta e quella elettrostatica permette di stabilire la seguente relazione fra v e r :

$$v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{Ze^2}{r} \quad (1)$$

Di conseguenza, l'energia E è data da:

$$E = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \quad (2)$$

Ora, come è noto, il modello planetario introdotto sopra non garantisce la stabilità dell'atomo, di conseguenza, seguendo Bohr, dobbiamo introdurre la seguente condizione di quantizzazione delle orbite:

$$2\pi r_n p_n = nh, \quad \text{con } n \text{ intero positivo,}$$

dove p_n è la quantità di moto dell'elettrone.

Ora, essendo $p_n = mv_n$ e sostituendo la condizione di quantizzazione in (1) con $r = r_n$ e $v = v_n$, si ottiene:

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m Z e^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, ..$$

Sostituendo tale relazione in (2), si ricava:

$$E_n = -\frac{Z^2 m e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, ..$$

Quando l'elettrone passa dall'orbita di raggio r_n a quella di raggio r_m , con $n > m$, allora viene emesso un fotone, la cui energia $h\nu$ è data dalla variazione di energia dell'elettrone:

$$h\nu = \frac{Z^2 m e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Ricordando il legame fra frequenza ν e lunghezza d'onda λ , si ottiene:

$$\frac{1}{\lambda(m, n)} = R'_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad m, n \text{ interi con } n > m,$$

dove $R'_H = \frac{Z^2 m e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c}$.

Sperimentalmente abbiamo ottenuto:

$$R'_H = 4R_H;$$

di conseguenza, dall'espressione teorica di R'_H , possiamo ricavare il valore di Z :

$$Z = \sqrt{\frac{32\epsilon_0^2 h^3 c R_H}{m e^4}} \approx 2.$$

In conclusione, si può affermare che le tre righe di Pickering appartengono allo spettro di emissione degli ioni di elio.

Quesito 1

La densità di energia del campo magnetico u_B in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico \vec{B} è data da:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Di conseguenza, dopo aver osservato che all'interno di un solenoide ideale il campo magnetico è costante, mentre all'esterno è nullo, allora si deduce che per determinare l'energia magnetica U immagazzinata nel campo magnetico creato dal solenoide, basta moltiplicare u_B per il volume V racchiuso dal solenoide; dunque, si ha:

$$U = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V,$$

da cui segue immediatamente l'espressione del modulo del campo magnetico proposta nel testo del presente quesito.

Per determinare la corrente I che circola nel solenoide, ricordiamo l'espressione del modulo del campo magnetico all'interno di esso:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l},$$

dove l è la lunghezza del solenoide.

Sostituendo l'espressione precedente in quella dell'energia magnetica, si deduce:

$$I = \frac{l}{N} \sqrt{\frac{2U}{\mu_0 V}} = 1,1 \text{ A.}$$

Quesito 2

a) Nel secondo solenoide circola una corrente $I(t)$ variabile nel tempo, la quale genera un campo magnetico $\vec{B}(t)$, variabile nel tempo, all'interno del solenoide. Di conseguenza, qualsiasi spira, contenuta nel primo solenoide, è attraversata da un flusso del campo magnetico variabile nel tempo. Sommando i vari flussi delle spire costituenti il primo solenoide, osserviamo che quest'ultimo è attraversato da un flusso magnetico variabile nel tempo che, a causa del fenomeno dell'induzione elettromagnetica, determina una forza elettromotrice \mathcal{E} indotta in esso. Calcoliamo il flusso totale $\Delta\Phi$, nell'intervallo $[t_0, t_0 + h]$, attraverso il primo solenoide, orientando i vettori di superficie delle sue spire in modo concorde con il verso di $I(t)$:

$$\Delta\Phi = N_1 [B(t_0 + h) - B(t_0)] S_1;$$

ora, siccome il primo solenoide è ideale, si ottiene:

$$B(t) = \frac{N_2 \mu_0 I(t)}{l_2} = \frac{N_2 \mu_0 k}{l_2} t,$$

dove l_2 è la lunghezza del secondo solenoide, di conseguenza, si ricava:

$$\Delta\Phi = N_1 \frac{N_2 \mu_0 k}{l_2} S_1 h.$$

Applicando la legge dell'induzione elettromagnetica, si ottiene la forza elettromotrice all'istante t_0 indotta ai capi del secondo solenoide:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{h} = -\frac{N_1 N_2 \mu_0 k}{l_2} S_1.$$

Dall'espressione ottenuta, è evidente che \mathcal{E} non dipende dal tempo.

b) Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$|\mathcal{E}| = 3,1 \cdot 10^{-4} \text{ V.}$$

Quesito 3

a) La potenza P del laser vale 1,0 W, di conseguenza, in 1 s, l'energia del laser è di 1,0 J. Ora, 1 m di laser attraversa la sua sezione nell'intervallo di tempo dato da $1 \text{ m} / c$ (dove c è la velocità della luce). Di conseguenza, l'energia E del laser corrispondente a un suo metro risulta:

$$E = 1,0 \text{ J} \cdot (299792458)^{-1} = 3,3 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

b) Determiniamo innanzitutto l'intensità (o irradiazione) I dell'onda:

$$I = \frac{P}{S} = 5,0 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2,$$

dove S è la sezione del laser.

Valgono le seguenti relazioni fra il campo elettrico massimo E_{max} , il campo magnetico massimo B_{max} e l'intensità I :

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_{max}^2 = \frac{1}{2 \mu_0} c B_{max}^2,$$

dove ϵ_0 e μ_0 sono rispettivamente la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del vuoto.

Dunque, si ottiene:

$$E_{max} = \sqrt{\frac{2I}{c \epsilon_0}} = 1,9 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}, \quad B_{max} = \sqrt{\frac{2 \mu_0 I}{c}} = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ T.}$$

c) L'energia emessa dal laser in 1 s vale 1,0 J. D'altra parte, il laser è costituito da fotoni di energia $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, dove h è la costante di Planck, mentre ν e λ sono rispettivamente la frequenza e la lunghezza d'onda del laser. Ora, indicato con n il numero di fotoni contenuti in 1,0 J, si ha:

$$n \frac{hc}{\lambda} = 1,0 \text{ J,}$$

da cui si ottiene il seguente valore di n :

$$n = 2,6 \cdot 10^{18}.$$

Quesito 4

a) Indicato con W_e il lavoro di estrazione del materiale metallico, la frequenza minima ν_{min} del fotone incidente, in corrispondenza del quale si ha emissione di un elettrone, è legata a W_e dalla seguente relazione:

$$h\nu_{min} = W_e,$$

dove h è la costante di Planck.

Ricordando la relazione di proporzionalità inversa fra frequenza e lunghezza d'onda, si deduce che la lunghezza d'onda massima richiesta è data da:

$$\lambda_{max} = \frac{c}{\nu_{min}} = \frac{hc}{W_e} = 2,41 \cdot 10^{-7} \text{ m},$$

dove $W_e = 5,15 \text{ eV}$.

b) Dall'analisi dell'effetto fotoelettrico, è possibile assumere in prima approssimazione che, quando una radiazione elettromagnetica incide su di una superficie metallica, un solo fotone alla volta interagisce singolarmente con un elettrone. Di conseguenza, indicato con n il numero di fotoni che incide al secondo su di una superficie metallica, sia p il numero di fotoni capaci di estrarre p elettroni. In base al testo, imponiamo:

$$\frac{p}{n} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}.$$

Ora la corrente di saturazione I è legata al numero p di elettroni dalla seguente formula:

$$I = \frac{pe}{\Delta t},$$

dunque, si ha:

$$n = \frac{4}{3}p = \frac{4I\Delta t}{3e} = 1,2 \cdot 10^{14}.$$

Quesito 5

Indichiamo con \mathcal{R} un sistema di riferimento inerziale Oxt che registra le seguenti velocità per le due astronavi in gioco:

$$v_x = 0,90c; \quad v'_x = -0,75c.$$

Introduciamo un nuovo riferimento inerziale \mathcal{R}' , indicato anche con $O'x't'$, con asse $O'x'$ parallelo ad Ox , solidale con l'astronave di velocità v_x .

Dopo questa premessa, utilizzando la formula relativistica della composizione delle velocità, determiniamo la velocità u della seconda astronave rispetto a \mathcal{R}' :

$$u = \frac{v'_x - v_x}{1 - \frac{v'_x v_x}{c^2}} = -0.99c.$$

Indicando con $L_0 = 34,5$ m la lunghezza propria della seconda astronave, allora, grazie alla formula della contrazione delle lunghezze, si ottiene la seguente lunghezza L della seconda astronave rispetto alla prima (\mathcal{R}'):

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 5,94 \text{ m.}$$

Quesito 6

L'elettrone $-e$, inizialmente in quiete, viene accelerato grazie alla differenza di potenziale ΔV , di conseguenza, acquisisce l'energia cinetica K data da:

$$K = e\Delta V;$$

essendo:

$$K = \frac{p^2}{2m},$$

dove m e p sono rispettivamente la massa e la quantità di moto dell'elettrone, si deduce:

$$p = \sqrt{2me\Delta V}.$$

Grazie all'ipotesi di de Broglie, è possibile associare all'elettrone una lunghezza d'onda λ legata a p dalla seguente relazione:

$$p = \frac{h}{\lambda};$$

dunque, si ottiene:

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{h^2}{2me}\right) \frac{1}{\Delta V}} = \sqrt{\frac{1,5041206 \cdot 10^{-18}}{\Delta V}} = \sqrt{\frac{1,5041206}{\Delta V}} \cdot 10^{-9} \approx \sqrt{\frac{1,504}{\Delta V}} \text{ (in nm)}.$$

Sostituendo $\Delta V = 50,0$ V nella formula precedente, si ricava:

$$\lambda = 1,73 \cdot 10^{-1} \text{ nm.}$$