

Soluzioni della simulazione della seconda prova di Fisica a.s. 2016/17 – 25 ottobre 2016

A cura di Gianni Melegari, Steave Selvaduray e Claudio Romeni

Problema 1

1) La f.e.m. alle estremità della bobina è generata dall'effetto della forza di Lorentz che, durante la rotazione della bobina, agisce sui portatori di carica liberi presenti nei fili. Questo è uno dei casi descritti dal fenomeno dell'induzione elettromagnetica che si modella con la legge di Faraday-Neumann, considerando la variazione del flusso attraverso una superficie \vec{S} che ha per contorno la bobina. Nel seguito indicheremo con N il numero di avvolgimenti della bobina stessa.

2) Il testo del problema, dicendo di trattare l'accelerazione angolare come un parametro fisso, da determinare, suggerisce di modellizzare il moto della bobina, per effetto della discesa del pesetto, come un moto circolare uniformemente accelerato. Il modulo α dell'accelerazione angolare, che di solito si definisce in modo elementare come

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

andrebbe in realtà inteso come una funzione del tempo $\alpha(t)$, ottenuta derivando rispetto a t l'ulteriore funzione $\omega(t)$ che fornisce la velocità angolare del moto di rotazione:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt};$$

a sua volta, $\omega(t)$ è la derivata della funzione $\theta(t)$ che fornisce la variazione nel tempo dell'angolo di rotazione, che qui conviene definire come l'angolo formato tra il vettore campo magnetico \vec{B} e il vettore superficie \vec{S} :

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}.$$

Nel caso in esame $\alpha(t) = \alpha$ è una costante; quindi, integrando, la legge che fornisce la velocità angolare è

$$\omega(t) = \int \alpha(t) dt = \alpha \int dt = \alpha t + \omega_0,$$

dove ω_0 è la costante di integrazione, che risulta pari al valore di $\omega(t)$ all'istante $t = 0$ s a cui inizia il moto di rotazione.

In maniera analoga la funzione $\theta(t)$ si ottiene come

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt = \int (\alpha t + \omega_0) dt = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0,$$

dove θ_0 è un'ulteriore costante di integrazione, uguale al valore dell'angolo $\theta(t)$ all'istante $t = 0$ s.

Dal testo si deduce che valgono le relazioni $\theta_0 = 0$ rad e $\omega_0 = 0$ rad/s, per cui le leggi del moto circolare uniformemente accelerato in esame sono

$$\begin{cases} \omega = \alpha t \\ \theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 \end{cases} \quad (1)$$

Sulla base delle formule (1), il flusso di campo magnetico attraverso la superficie \vec{S} si scrive come

$$\Phi_{\vec{s}}(\vec{B}) = NBS \cos \theta = NBS \cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right). \quad (2)$$

Quindi la forza elettromotrice misurata ai capi della bobina si calcola come

$$y = f(t) = -\frac{d\Phi_{\vec{s}}(t)}{dt} = NBS\alpha t \sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right). \quad (3)$$

L'ampiezza $A(t)$ della funzione ora ottenuta ha la forma

$$A(t) = NBS\alpha t \quad (4)$$

ed evidentemente è crescente in modo lineare con il tempo, come affermato nel testo.

Inoltre gli zeri della funzione $f(t)$ si localizzano ponendo

$$\frac{1}{2}\alpha t_k^2 = k\pi \quad (k \in \mathbb{N})$$

e quindi corrispondono agli istanti di tempo

$$t_k = \sqrt{\frac{2k\pi}{\alpha}}. \quad (5)$$

Allora la durata T_k di una mezza rotazione, cioè la distanza temporale tra due zeri consecutivi della funzione $y = f(x)$, risulta:

$$T_k = t_{k+1} - t_k = \sqrt{\frac{2(k+1)\pi}{\alpha}} - \sqrt{\frac{2k\pi}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}). \quad (6)$$

È interessante studiare la derivata della funzione $y = g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$; per $x > 0$, essa risulta

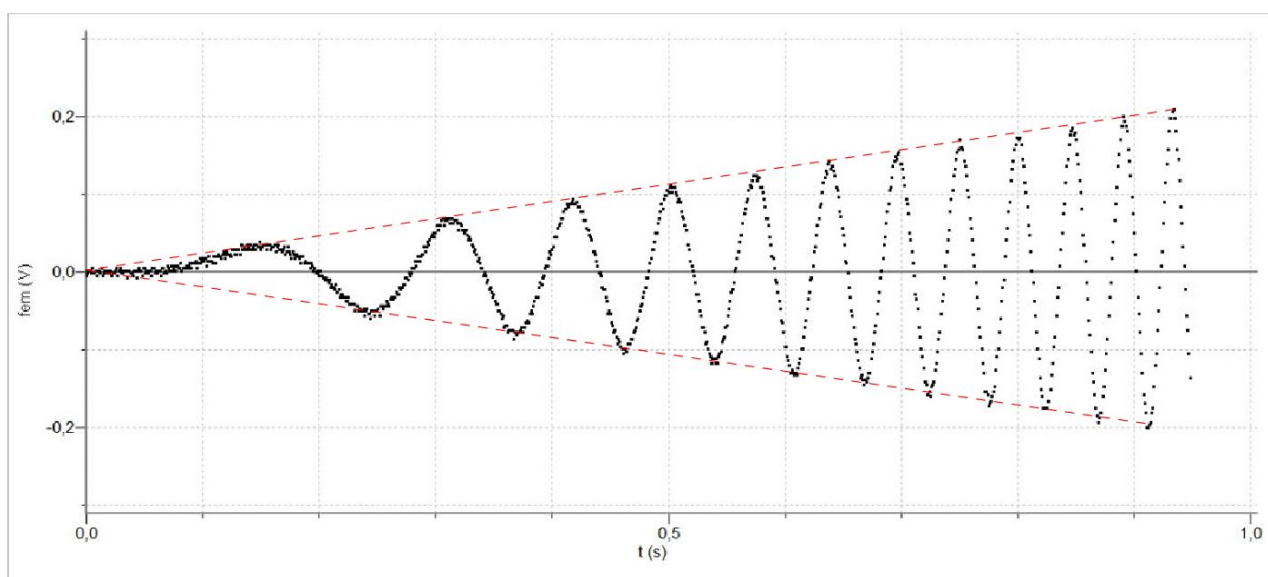
$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}}. \quad (7)$$

Visto che la funzione \sqrt{x} è crescente in tutto il suo dominio, la funzione (7) è sempre negativa. Questo è vero anche se si sceglie $x = k > 0$, per cui la successione T_k risulta sempre decrescente.

Dal punto di vista fisico, la durata delle rotazioni diminuisce perché, con il progressivo scendere del pesetto, la velocità angolare di rotazione aumenta. Per la stessa ragione aumenta l'ampiezza della forza elettromotrice indotta, che dipende dalla rapidità con cui varia il flusso $\Phi_{\vec{s}}(\vec{B})$.

c) Un semplice grafico mostra che i dati sperimentali sono in ottimo accordo con il modello che prevede un aumento dell'ampiezza di oscillazione direttamente proporzionale al tempo.

Le due rette disegnate hanno equazioni $y = \pm A(t) = \pm NBS\alpha t$.



Quindi il coefficiente lineare della retta che collega (per esempio) i massimi di oscillazione può essere determinata scegliendo un solo punto sperimentale. Risulta particolarmente comodo utilizzare il penultimo massimo, a cui si può assegnare ordinata pari a 0,20 V e ascissa (letta sul grafico) uguale a 0,89 s. Di conseguenza, il coefficiente angolare di quella retta ha valore

$$NBS\alpha = m = \frac{0,20 \text{ V}}{0,89 \text{ s}} = 0,22 \frac{\text{T} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}. \quad (8)$$

Inoltre si può utilizzare la formula (5) con il lo zero di ascissa 0,90 s, a cui corrisponde il valore $k = 21$ (ottenuto contando semplicemente il numero di intersezioni del grafico sperimentale con l'asse t). In questo modo si ottiene

$$\alpha = \frac{2k\pi}{t_k^2} = \frac{42\pi}{t_{21}^2} = \frac{42\pi}{(0,90 \text{ s})^2} = 1,6 \times 10^2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}. \quad (9)$$

Inserendo il dato (9) nella formula (8) si trova

$$B = \frac{m}{NS\alpha} = \frac{0,22 \text{ T} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2}{100 \times (0,25 \text{ m}) \times (0,30 \text{ m}) \times (1,6 \times 10^2 \text{ rad/s}^2)} = 1,8 \times 10^{-4} \text{ T}. \quad (10)$$

Naturalmente, scegliendo altri punti sperimentali si raggiungono gli stessi risultati.

4) La parte di piano evidenziata in nero nella figura 3 è uguale al modulo della variazione del flusso di campo magnetico durante una metà della rotazione completa. A sua volta, questa variazione positiva del flusso è uguale al flusso $\Phi(t_4)$ all'istante t_4 a cui viene sottratto il flusso $\Phi(t_5)$ all'istante t_5 :

$$\Phi(t_4) - \Phi(t_5) = \Phi(t_4) - [-\Phi(t_4)] = 2\Phi(t_4) = 2NBS.$$

Il problema chiede però di verificare questa affermazione utilizzando esplicitamente la forma della relazione funzionale $y = f(x)$.

Per ottenere un risultato positivo si può generalizzare l'esempio precedente ponendo $k = 2n, n \in \mathbb{N}$; si è così condotti a calcolare l'integrale

$$I_n = \int_{t_{2n}}^{t_{2n+1}} f(t) dt = \int_{\sqrt{4n\pi/\alpha}}^{\sqrt{2(2n+1)\pi/\alpha}} f(t) dt = \int_{\sqrt{4n\pi/\alpha}}^{\sqrt{2(2n+1)\pi/\alpha}} NBS\alpha t \sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) dt.$$

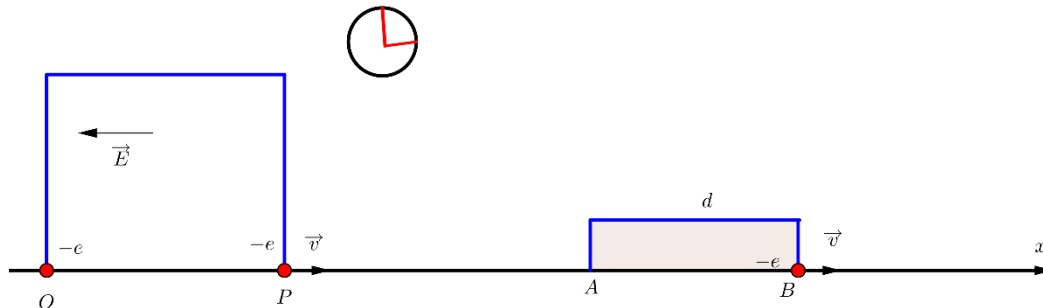
Una primitiva della funzione integranda è già nota, ed è l'opposto del flusso (2). Quindi si ottiene

$$I_n = \left[-NBS \cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) \right]_{\sqrt{4n\pi/\alpha}}^{\sqrt{2(2n+1)\pi/\alpha}} = -NBS \cos((2n+1)\pi) + NBS \cos(2n\pi) = 2NBS. \quad (11)$$

È così confermato il risultato dedotto prima da considerazioni generali.

Problema 2

1) La Figura 1 può essere schematizzata nel seguente modo



in cui viene evidenziato, in particolare, il moto di un elettrone di carica $-e$. Più precisamente, l'elettrone viene emesso da un catodo caldo posto in O . Si assume per semplicità che la velocità di emissione dell'elettrone sia pari a 0 m/s. La particella entra in una regione in cui agisce un campo elettrostatico uniforme e quindi esce da tale regione, nel punto P , con una velocità v .

Tale velocità si ottiene attraverso l'uguaglianza fra il lavoro positivo (lavoro motore) compiuto dal campo elettrico e l'energia cinetica. Dopodiché, l'elettrone arriva al punto A e giunge al punto B indisturbato oppure soggetto a un'ulteriore accelerazione se il LINAC è acceso.

Un oscilloscopio collegato ad A e a B permette di conoscere il tempo impiegato dall'elettrone a percorrere la distanza fra tali punti. Infine, l'elettrone scarica la sua energia in B che viene misurata attraverso la quantità di calore assorbita in tale punto.

Nella risoluzione del problema si assumono i seguenti valori numerici

$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s (velocità della luce)}$$

$$m = 9,1093826 \cdot 10^{-31} \text{ kg (massa dell'elettrone)}$$

$$-e = -1,60217653 \cdot 10^{-19} \text{ C (carica dell'elettrone)}$$

inoltre, la distanza d , presente in figura, vale, in base al testo del problema, $8,40$ m.

Dopo questa premessa, è possibile procedere all'analisi del rapporto $\frac{v^2}{c^2}$ in relazione al lavoro W compiuto dal campo elettrostatico sul generico elettrone nel caso in cui il LINAC sia spento.

L'applicazione del teorema di conservazione fra i punti O e P , permette di dedurre la seguente relazione

$$W = K,$$

dove $W = e\Delta V$ (ΔV è la differenza di potenziale generata dalla macchina di Van de Graaff) e $K = \frac{1}{2}mv^2$ è l'espressione classica dell'energia cinetica della particella.

Da tale relazione si ottiene immediatamente

$$v^2 = \frac{2W}{m}$$

Dividendo quest'ultima per c^2 , si ricava

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{2W}{mc^2}$$

Siccome in questo problema ci sono vari modi di determinare la velocità, quella ottenuta con metodi classici viene indicata con v_{cl} ; dunque, si ha

$$\frac{v_{cl}^2}{c^2} = \frac{2W}{mc^2}$$

Dalle informazioni contenute nel testo del problema possiamo ipotizzare che la velocità dell'elettrone sia costante dal punto P al punto B , poiché si assume che esso proceda in uno spazio in cui sia stato realizzato il vuoto spinto e che il LINAC sia spento; inoltre, dato il rapidissimo tempo di transito, si trascura la caduta di questa particella nel campo gravitazionale.

Allora il valore della velocità, che indichiamo con v_{es} , poiché viene determinata in modo diretto, è dato da

$$v_{es} = \frac{d}{\Delta t}$$

dove Δt è il tempo segnato dall'oscilloscopio. Da questa formula segue immediatamente

$$\frac{v_{es}^2}{c^2} = \frac{d^2}{c^2 \Delta t^2}$$

Nella Tabella 1 del testo la prima riga fornisce tre valori della differenza di potenziale ΔV , mentre la seconda riga moltiplicata per $0,98 \cdot 10^{-8}$ s (tempo corrispondente a un quadretto del reticolo), fornisce tre valori del tempo Δt .

Dopo questa premessa, è possibile costruire le seguenti tabelle:

Tabella sperimentale

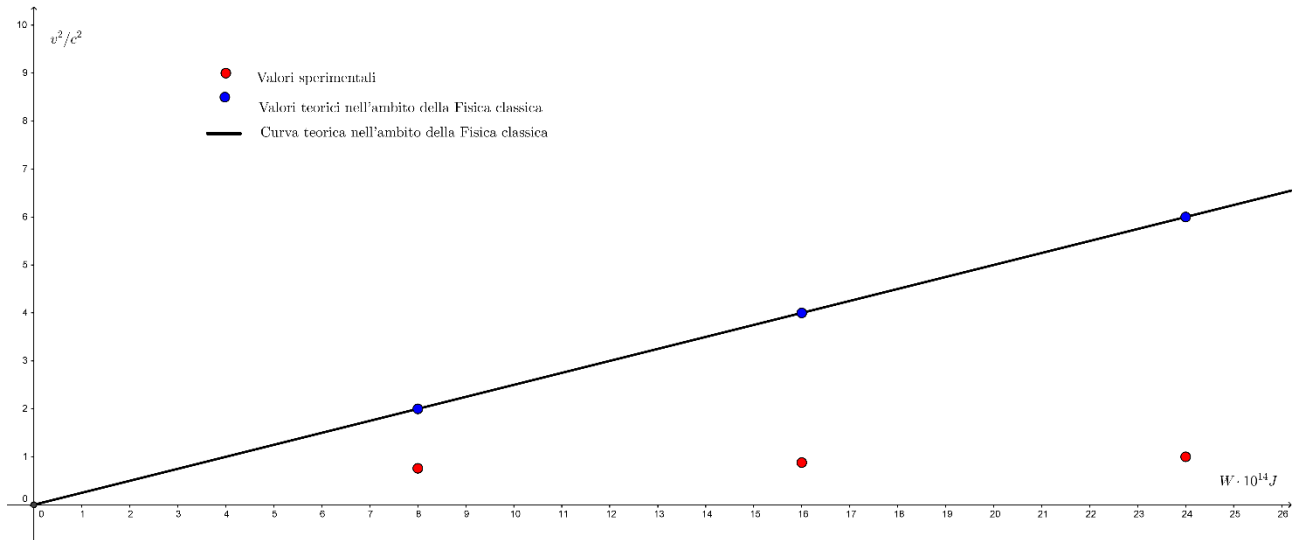
ΔV (10^6 V)	$W = e\Delta V$ (J)	$N =$ Numero divisioni tra i due impulsi	$\Delta t = N \cdot 0,98 \cdot 10^{-8}$ (s)	$\frac{v_{es}^2}{c^2} = \frac{d^2}{c^2 \Delta t^2}$
0,50	$8,0 \cdot 10^{-14}$	3,30	$3,2 \cdot 10^{-8}$	0,77
1,0	$1,6 \cdot 10^{-13}$	3,19	$3,0 \cdot 10^{-8}$	0,87
1,5	$2,4 \cdot 10^{-13}$	2,95	$2,9 \cdot 10^{-8}$	0,94

Tabella teoria classica

ΔV (10^6 V)	$W = e\Delta V$ (J)	$\frac{v_{cl}^2}{c^2} = \frac{2W}{mc^2}$
0,50	$8,0 \cdot 10^{-14}$	2,0
1,0	$1,6 \cdot 10^{-13}$	3,9
1,5	$2,4 \cdot 10^{-13}$	5,9

L'analisi dell'ultima colonna mette bene in evidenza la difficoltà di ottenere i valori sperimentali di velocità con metodi classici. Secondo un modello classico la discordanza tra i valori sperimentali delle velocità e quelli teorici potrebbe essere dovuta a fenomeni di dissipazione di energia. Nel modello relativistico, invece, i valori teorici ottenuti classicamente sono assurdi poiché la velocità della luce è la velocità limite imposta dalle leggi della fisica.

È a questo punto possibile rappresentare i grafici delle funzioni $\frac{v_{es}^2}{c^2}$, $\frac{v_{cl}^2}{c^2}$ in relazione a W .



2) Dopo aver constatato, nel punto 1, che la meccanica classica non è in grado di ottenere i valori sperimentali di velocità, poiché i valori teorici di velocità superano la velocità della luce e comunque non sono in accordo con i dati sperimentali, conviene utilizzare la teoria della relatività ristretta per spiegare i risultati sperimentali ricavati. A tale scopo, è bene partire dalla formula relativistica dell'energia cinetica K :

$$K = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right),$$

poiché l'unica punto debole del modello classico risiede nell'uso dell'espressione non relativistica di tale forma di energia.

Attraverso semplici passaggi algebrici, si ricava

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{K}{mc^2}\right)^2}.$$

Quando l'elettrone di carica $-e$ arriva in P , il lavoro $W = e\Delta V$ del campo elettrostatico si ritrova sotto forma di energia cinetica della particella in questione, per cui si ha

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{W}{mc^2}\right)^2}.$$

La velocità v ottenuta viene indicata con v_{re} ; dunque, si deduce

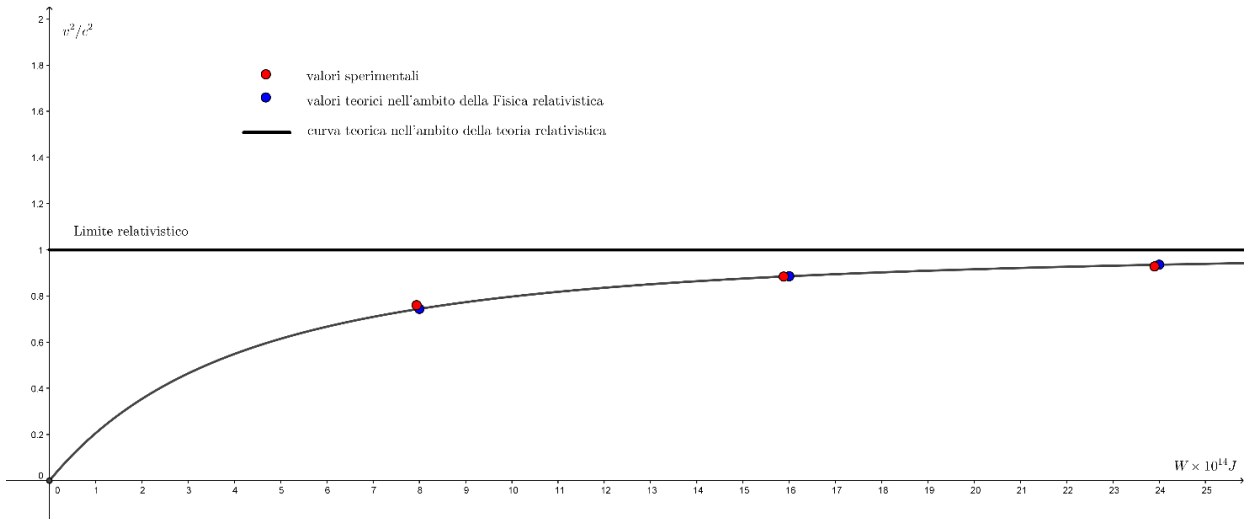
$$\frac{v_{re}^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{W}{mc^2}\right)^2}$$

3) La formula precedente permette di ottenere la seguente tabella:

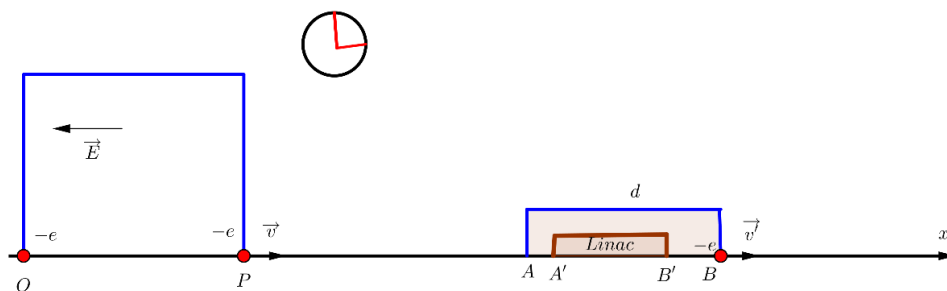
Tabella teoria relativistica

ΔV ($10^6 V$)	$W = e\Delta V$ (J)	$\frac{v_{re}^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{W}{mc^2}\right)^2}$
0,5	$8,0 \cdot 10^{-14}$	0,74
1,0	$1,6 \cdot 10^{-13}$	0,89
1,5	$2,4 \cdot 10^{-13}$	0,94

I valori dell'ultima colonna sono in buon accordo con quelli dell'ultima colonna della tabella sperimentale. È a questo punto possibile rappresentare i grafici delle funzioni $\frac{v_{re}^2}{c^2}$, $\frac{v_{es}^2}{c^2}$ in relazione a W .



4) In questo punto si considera anche l'azione del LINAC. L'unica variante, rispetto al caso di LINAC spento, è che l'elettrone entrando in questo acceleratore subisce un ulteriore incremento di energia e quindi di velocità. Di conseguenza, la sua velocità nel punto B non ha più modulo v ma v' con $v' > v$.



Il lavoro W_{fascio} fornito dal sistema degli acceleratori relativo al fascio di elettroni di carica complessiva $-q$ è dato da

$$W_{fascio} = W + W',$$

dove W e W' sono rispettivamente il lavoro fornito dal generatore di Van de Graaff e quello fornito dal LINAC (è diverso da zero se questo acceleratore è acceso). Naturalmente, per il teorema di conservazione dell'energia, si ha

$$W = K,$$

dove K è l'energia cinetica del fascio di elettroni in P o in A' (ingresso al LINAC). Quando il fascio entra nel LINAC, la variazione di energia cinetica $K' - K$, all'uscita dall'acceleratore, cioè in B' , è data da

$$K' - K = W',$$

da cui segue immediatamente

$$K' = K + W' = W + W' = W_{fascio}$$

K' è l'energia del fascio misurata in B sotto forma di quantità di calore assorbita in tale punto. Questa relazione mette in evidenza come il lavoro fornito dagli acceleratori si ritrova sotto forma di energia cinetica del fascio di elettroni.

Dopo questa premessa, si osserva che la tabella 2 permette di calcolare il lavoro W_{fascio} fornito dal sistema degli acceleratori relativo al fascio di elettroni attraverso la moltiplicazione, in colonna, fra la prima riga (differenza di potenziale) e la seconda (la carica va espressa in C); dunque, si ha

Energia del fascio in B (J)	ΔV (V)	q (C)	$W_{fascio} = q\Delta V$ (J)
10,0	$1,5 \cdot 10^6$	$6,1 \cdot 10^{-6}$	9,2
29,2	$4,5 \cdot 10^6$	$6,1 \cdot 10^{-6}$	27

I valori dell'ultima colonna sono prossimi ai valori della prima colonna e ciò permette di concludere (come si afferma nel testo) che non c'è perdita di energia. Di conseguenza l'esperimento di W. Bertozzi (1963-64) può essere spiegato attraverso la teoria della relatività ristretta di A. Einstein (1905) e quindi ne costituisce una conferma.

Quesito 1

L'energia irradiata E da una sorgente di potenza P nel tempo Δt è data dalla seguente formula

$$E = P \cdot \Delta t.$$

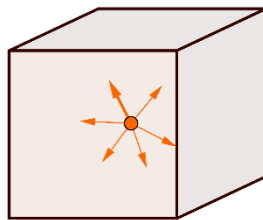
Nel caso in questione si ha

$$E = 100 \text{ W} \cdot 10 \text{ min} \cdot 60 \frac{\text{s}}{\text{min}} = 6,0 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

L'energia emessa dalla lampadina si propaga all'ambiente come energia luminosa, ma anche attraverso uno scambio di calore (si parla in modo esplicito di una lampada a incandescenza).

L'ipotesi più semplice è che i flussi di energia siano isotropi. In questo modo la sorgente, posta al centro del cubo, irradia allo stesso modo 6 facce quadrate identiche, e così l'energia che arriva nel soffitto in 10 minuti è la seguente

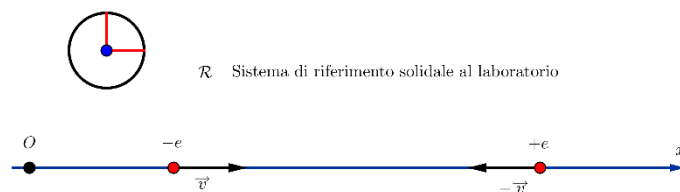
$$E_{\text{soffitto}} = \frac{E}{6} = 1,0 \cdot 10^4 \text{ J}.$$



Quesito 2

Indicando con m la massa di entrambe le particelle in gioco, si deduce che la loro energia E_0 a riposo è data da

$$E_0 = mc^2 = 0,511 \text{ Mev}.$$



Essendo l'energia totale E , rispetto al riferimento di laboratorio \mathcal{R} , di ciascuna particella pari a 1,51 Mev, l'energia cinetica K dell'elettrone o del positrone è data da

$$K = E - E_0 = 1,00 \text{ Mev}.$$

Ricordando l'espressione di K

$$K = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right),$$

si deduce il modulo della velocità delle particelle rispetto a \mathcal{R}

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{K}{mc^2}\right)^2}} = 2,82 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

(osserva che $\frac{K}{mc^2} = 1,00/0,511$). Per calcolare la velocità v' del positrone rispetto all'elettrone (sistema di riferimento \mathcal{R}' con asse x' orientato come l'asse x di \mathcal{R}), basta ricordare la formula di composizione relativistica della velocità; nel caso in questione, si ha

$$v' = \frac{-v-v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = -\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = -2,99 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

Si osservi come la velocità trovata ha le prime tre cifre significative identiche a quelle della velocità della luce, nonostante ciò, essa è minore di c poiché il positrone ha massa non nulla e nessun corpo dotato di massa può raggiungere la velocità della luce. A conferma, se si ripetono i calcoli con una cifra significativa in più si ottiene $v' = -2,992 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, mentre la velocità della luce nel vuoto vale $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Quesito 3

L'equazione

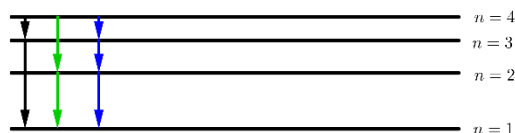
$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N} - \{0\}, n_1 < n_2,$$

determina le lunghezze d'onda λ delle righe spettrali dell'atomo d'idrogeno.

Quando l'elettrone, che si trova nello stato fondamentale $n_1 = 1$, riceve il fotone di lunghezza d'onda $\lambda = 9,72 \cdot 10^{-8} \text{ m}$, si porta nello stato caratterizzato dal seguente n_2

$$n_2 = \sqrt{\frac{R\lambda}{R\lambda - 1}} \approx 4$$

Per determinare il numero di transizioni, esclusa la transizione che porta direttamente allo stato fondamentale, si riporta la seguente figura esplicativa.



- 1 + 1 = 2 transizioni
- 1 + 1 = 2 transizioni
- 1 + 1 + 1 = 3 transizioni

Il numero dei casi elencati è 7, ma ci sono solo 5 transizioni distinte.

Si tratta ora di stabilire quali transizioni provocano emissione nel visibile, cioè si tratta di determinare quelle transizioni caratterizzate dall'emissione di un fotone con lunghezza d'onda $\lambda \in [\lambda_{min} = 3,80 \cdot 10^{-7} \text{ m}, \lambda_{max} = 7,50 \cdot 10^{-7} \text{ m}]$. Per ottenere tali transizioni, occorre studiare la seguente disequazione che segue dalla formula di Rydberg

$$\frac{1}{\lambda_{max}R} \leq \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \leq \frac{1}{\lambda_{min}R}$$

che, dopo aver sostituito i valori numerici agli estremi, diventa

$$0,12 \leq \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \leq 0,24. \quad (*)$$

Le due transizioni segnate nella figura in nero forniscono

Tran. $4 \rightarrow 3$ $n_2 = 4, n_1 = 3 \Rightarrow \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} = 0,05$ (fuori dalla banda del visibile perché non soddisfa (*))

Tran. $3 \rightarrow 1$ $n_2 = 3, n_1 = 1 \Rightarrow \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} = 0,89$ (fuori dalla banda del visibile perché non soddisfa (*))

Le due transizioni segnate nella figura in verde forniscono

Tran. $4 \rightarrow 2$ $n_2 = 4, n_1 = 2 \Rightarrow \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} = 0,19$ (nella banda del visibile perché soddisfa (*))

Tran. $2 \rightarrow 1$ $n_2 = 2, n_1 = 1 \Rightarrow \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} = 0,75$ (fuori dalla banda del visibile perché non soddisfa (*))

Delle tre transizioni segnate nella figura in blu, solo una non è ancora stata analizzata:

Tran. $3 \rightarrow 2$ $n_2 = 3, n_1 = 2 \Rightarrow \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} = 0,14$ (nella banda del visibile perché soddisfa (*))

Riassumendo, le uniche transizioni nel visibile sono $4 \rightarrow 2$ e $3 \rightarrow 2$ e sono contenute nella serie di Balmer.

Quesito 4

Nelle condizioni illustrate nel disegno la componente z del campo magnetico può essere scritta come

$$B_z(t) = B_0 \cos(\omega t),$$

dove B_0 è il massimo modulo del campo magnetico variabile e la pulsazione ω vale

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times (27 \times 10^6 \text{ Hz}) = 1,7 \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Visto che il campo magnetico e il vettore superficie dell'antenna ricevente hanno la stessa direzione, la forza elettromotrice indotta nell'antenna quadrata si calcola come

$$f_{em}(t) = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d[S B_0 \cos(\omega t)]}{dt} = S B_0 \omega \sin(\omega t).$$

Il valore efficace della forza elettromotrice indotta, vale, quindi

$$f_{em,eff} = \frac{S B_0 \omega}{\sqrt{2}}.$$

Da quest'ultima formula si ricava B_0 come

$$B_0 = \frac{\sqrt{2} f_{em,eff}}{S \omega} = \frac{\sqrt{2} (1,25 \times 10^{-2} \text{ V})}{(0,20 \text{ m})^2 (1,7 \times 10^8 \text{ rad/s})} = 2,6 \times 10^{-9} \text{ T}.$$

L'intensità dell'onda elettromagnetica è descritta dall'irradiamento

$$\begin{aligned} E_e &= \frac{\Delta P}{\Delta S} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2} c \frac{1}{\mu_0 c^2} c^2 B_0^2 = \frac{1}{2} c \frac{B_0^2}{\mu_0} = \\ &= \frac{1}{2} \left(3,00 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \frac{(2,6 \times 10^{-9} \text{ T})^2}{4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2} = 8,1 \times 10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \end{aligned}$$

Se si fa l'ipotesi che l'antenna della radio ricetrasmittente irraggi in modo isotropo, la sua potenza P può essere determinata come

$$P = 4\pi r^2 E_e = 4\pi \times (100 \text{ m})^2 \times \left(8,1 \times 10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right) = 1,0 \times 10^2 \text{ W}.$$

Considerando che l'antenna, posta vicino al terreno, irraggi su una semisfera, si ottiene almeno una potenza di 50 W. In entrambi i casi la stazione trasmittente non rispetta le norme di legge.

Quesito 5

Per risolvere il quesito si può considerare uno qualunque dei livelli energetici che compaiono nella figura; per esempio il secondo, a cui corrisponde un'energia

$$E_2 = 9,4 \text{ eV} = 9,4 \text{ eV} \times 1,602 \times 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}} = 1,5 \times 10^{-18} \text{ J}.$$

In analogia con gli stati stazionari di una corda vibrante, la lunghezza d'onda λ_2 dell'onda di de Broglie relativa al primo stato eccitato ($n = 2$) è uguale alla larghezza della buca, per cui vale

$$\lambda_2 = 0,4 \text{ nm} = 4 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

Dalla relazione di de Broglie si ottiene, quindi, che la quantità di moto p_2 corrispondente è

$$p_2 = \frac{h}{\lambda_2} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{4 \times 10^{-10} \text{ m}} = 1,66 \times 10^{-24} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

L'energia della particella nella buca di potenziale è esclusivamente cinetica e quindi l'energia E_2 del primo stato eccitato è data all'espressione

$$E_2 = \frac{p_2^2}{2m}.$$

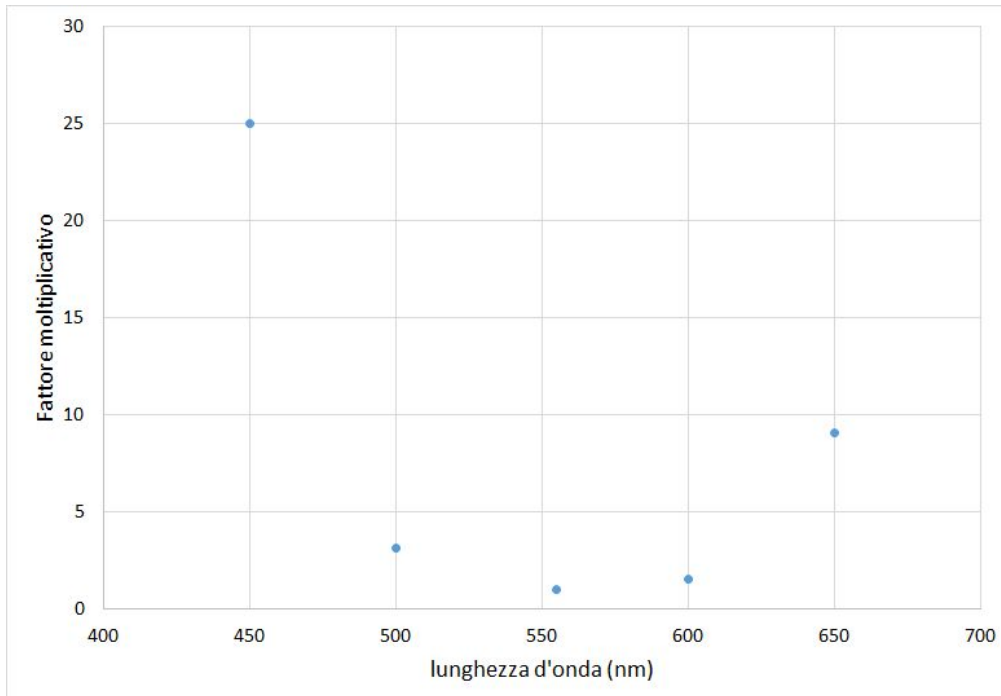
È quindi possibile calcolare

$$m = \frac{p_2^2}{2E_2} = \frac{(1,66 \times 10^{-24} \text{ kg}\cdot\text{m/s})^2}{2 \times 1,5 \times 10^{-18} \text{ J}} = 9 \times 10^{-31} \text{ kg}.$$

Il risultato, fornito con una sola cifra significativa perché anche il dato su λ_2 ne ha una sola, è compatibile con il valore $9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ della massa dell'elettrone.

Quesito 6

Dai dati della curva di sensibilità si deduce il seguente grafico, in cui le ordinate sono semplicemente l'inverso della sensibilità dell'occhio alle corrispondenti lunghezze d'onda.



L'energia E di un fotone di frequenza f quindi lunghezza d'onda λ è data dalla formula

$$E = hf = h \frac{c}{\lambda}.$$

Per fare in modo che N_2 fotoni di lunghezza d'onda $\lambda_2 = 650$ nm forniscano al cervello la stessa energia dovuta a $N_1 = 1000$ fotoni con lunghezza d'onda $\lambda_1 = 555$ nm, l'energia totale dei primi deve essere uguale a quella dei secondi, moltiplicata per il fattore correttivo $1/0,11$. Si ottiene così la condizione

$$N_2 h \frac{c}{\lambda_2} = \frac{1}{0,11} N_1 h \frac{c}{\lambda_1},$$

da cui si ottiene il risultato

$$N_2 = \frac{1}{0,11} N_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1000}{0,11} \frac{650 \text{ nm}}{555 \text{ nm}} = 1,1 \times 10^4.$$