

## Lo studio del moto browniano: un esame della prima teoria di Einstein sull'argomento

(Ricevuto il 16-3-88)

### Premessa

Chi si avventura nello studio della storia dei primi modelli dell'atomo, s'imbatte immancabilmente nei dibattiti che nell'ottocento si accesero tra coloro che erano convinti della realtà degli atomi e delle molecole e coloro che invece ritenevano che atomi e molecole fossero solo enti astratti, concetti utili unicamente nel linguaggio della chimica, e che quindi niente avessero a che fare con la realtà fisica. Ai primi del novecento invero la maggior parte dei fisici era convinta della natura atomica della materia, tanto che erano stati ideati diversi metodi per una stima delle dimensioni delle molecole e del numero di Avogadro. Ma c'erano anche scienziati illustri, come Ostwald e Mach, che si opponevano decisamente alla teoria atomica. Soltanto quando Einstein ebbe elaborato la sua teoria del moto browniano, confermata poi dai lavori sperimentali di Perrin, anche questi scienziati dovettero arrendersi alla realtà degli atomi (con l'eccezione di Mach che, a dire il vero, continuò a considerare l'atomicità della materia solo come un'ipotesi, anche se assai utile).

Lo studio del moto browniano da parte di Einstein risultò dunque d'importanza cruciale per la fisica. Scrive Born: "Secondo me, queste ricerche di Einstein hanno contribuito più di qualsiasi altro lavoro a convincere i fisici della realtà degli atomi e delle molecole, della fondatezza della teoria cinetica del calore, nonché dell'importanza fondamentale della probabilità nelle leggi naturali." (1)

### Caratteristiche generali del moto browniano

Il moto browniano si osserva esaminando al microscopio una sospensione, in un gas o in un liqui-

do, di particelle sufficientemente piccole (dell'ordine di  $10^{-3}$  mm). Un esempio può essere costituito da granuli di fumo sospesi in aria o da granuli di una soluzione colloidale o di una emulsione o di un precipitato fine, sospesi in un liquido. Il fenomeno consiste in un continuo moto di agitazione delle particelle, tanto più vivace quanto più le particelle medesime sono piccole. Il moto è incessante: all'interno di una bolla di liquido che non possa evaporare lo si può osservare anche per mesi. Il moto di una particella inoltre risulta essere completamente indipendente dal moto delle particelle vicine. Perciò il moto dei granelli di polvere sospesi nell'aria che osserviamo guardando un raggio di sole non ha nulla a che fare con il moto browniano: esso è infatti causato da piccole e irregolari correnti d'aria dovute a lievi variazioni di pressione e di temperatura.

La spiegazione che si dà oggi del fenomeno è la seguente: gli urti delle molecole del gas o del liquido che, su di un corpo esteso, sono tanto frequenti in tutte le direzioni da non produrre alcuna spinta risultante, su di una superficie più piccola, come per esempio quella di una particella di una sospensione, risultano meno frequenti e meno equamente distribuiti così che, casualmente, ora prevalgono quelli in una direzione ora quelli in un'altra. La particella è quindi continuamente sollecitata a muoversi nelle diverse direzioni in modo affatto irregolare. Essa si trova nelle stesse condizioni in cui si troverebbe una molecola di una miscela di gas, con la differenza che le sue dimensioni sono molto maggiori di quelle di una molecola (una massa anche fino a  $10^{10}$  maggiore). Come per le miscele di gas, vale allora il principio di equipartizione dell'energia: ogni particella ha la stessa energia cinetica media, uguale a quella di una molecola di gas. Ma poiché la massa è molto maggiore, la velocità della particella rispetto a quella delle molecole è molto minore, così che il suo moto si può seguire al microscopio.

\* Gruppo Nazionale di Storia della Fisica - Sezione di Parma.

### Breve storia del moto browniano (2)

Come si è detto, il moto browniano acquistò un ruolo rilevante nella storia della fisica solo dopo il 1905. Fino ad allora esso non ebbe quell'attenzione che forse avrebbe meritato. È singolare osservare come un fenomeno, preso assai raramente in considerazione dai fisici che svilupparono la teoria cinetica dei gas, sarebbe poi stato ritenuto costituire la migliore dimostrazione della realtà del moto molecolare disordinato.

Fin dal XVIII secolo molti biologi avevano osservato come le "molecole" organiche poste in un liquido fossero dotate di un moto incessante. Nel 1828 un botanico inglese, Robert Brown (1771-1858), pubblicò un pamphlet dal titolo: "A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies". Brown stava studiando l'azione del polline nel processo di fecondazione. Una delle piante prese in considerazione aveva il polline contenente particelle di dimensioni comprese fra 1/5000 e 1/4000 di pollice (cinque e sei micron, circa). Scrive Brown: "Mentre esaminavo la forma di queste particelle immerse in acqua, osservai che molte di esse erano, in modo molto evidente, in moto; il loro moto consisteva in un cambiamento di posizione nel liquido, manifestandosi in modifiche delle loro posizioni relative, ma anche, e non infrequentemente, in un cambiamento di forma della particella stessa... In alcuni casi la particella era vista ruotare intorno al suo asse più lungo. Questi moti furono tali da convincermi, dopo osservazioni frequentemente ripetute, che essi avevano origine non da corrente nel fluido o dalla sua graduale evaporazione, ma erano propri delle particelle stesse." (3) Brown quindi esaminò parti-celle di numerose altre piante, anche non viventi, quali quelle conservate in un erbario da circa un secolo, e ritrovò lo stesso tipo di moto. Provò poi con altre "molecole organiche" di vari tipi di vegetali o animali, vivi o morti, con gli stessi risultati. Dopo aver studiato diversi residui vegetali mineralizzati, Brown cominciò a sospettare che le "molecole" mobili potessero essere anche di origine inorganica. E in effetti constatò la presenza dei moti "browniani" in particelle delle sostanze più diverse, dalla fuliggine al vetro della finestra. Grande merito di Brown fu dunque quello non tanto di avere scoperto il fenomeno, quanto di averlo fatto uscire dall'ambito puramente biologico nel quale pareva inserito, per introdurlo nel quadro della fisica.

Il libretto di Brown suscitò grande interesse. Si formularono le più svariate ipotesi sulle cause del moto: differenze di temperatura nel liquido, fortemente illuminato per permettere l'osservazione

delle particelle sospese, evaporazione, correnti d'aria, flusso di calore, capillarità, movimento delle mani dello sperimentatore, ecc. In una memoria successiva Brown, dopo aver negato di aver voluto sostenere l'esistenza di "molecole animate", come molti avevano pensato dopo aver letto la sua prima pubblicazione, confutò l'idea che il moto potesse essere causato dall'evaporazione. Descrisse a tal fine un esperimento da lui eseguito, mescolando olio all'acqua in cui si trovavano sospese le particelle. In tal modo le gocce d'acqua completamente circondate dall'olio, avevano una bassissima probabilità di evaporare, e ciononostante il moto delle particelle contenute in tali gocce era ancora osservabile.

Dopo l'iniziale eccitazione, il moto browniano fu a lungo trascurato. Negli anni fra il 1860 e il 1870 si cominciò a pensare che la causa del fenomeno fosse da ricercare nei moti interni del fluido e, più tardi, al fatto che il moto potesse effettivamente essere dovuto agli urti con le molecole del fluido. Non erano però molti i fisici che avanzavano simili ipotesi; tra questi possiamo citare l'italiano Giovanni Cantoni di Pavia, secondo il quale il moto browniano era da attribuirsi all'agitazione termica del liquido, sostenendo che questo fenomeno "fornisce una bella e diretta dimostrazione sperimentale dei principi fondamentali della meccanica del calore" (1868) (4). Si era comunque sempre a livello di ipotesi, di congetture, non esisteva una valida teoria che spiegasse il fenomeno, qualunque fosse la causa alla quale si attribuiva. Tra coloro che, prima della fine del XIX secolo, si occuparono ancora del moto browniano, possiamo citare il fisico francese L. Gouy, che lo proponeva come esempio di eccezione alla seconda legge della termodinamica, suscitando l'occasionale interesse di H. Poincaré.

### Primo articolo di Einstein sul moto browniano

Nel 1905 Einstein aveva 26 anni e lavorava all'Ufficio Brevetti di Berna. Quell'anno fu uno dei più fecondi della sua carriera scientifica; pubblicò infatti ben cinque lavori, tutti di grandissima importanza per lo sviluppo della fisica: i due articoli, di cui il primo fondamentale, che segnano la nascita della relatività ristretta; quello in cui introduce il concetto di quanto di luce o fotone, noto come articolo sull'effetto fotoelettrico e per il quale avrà il premio Nobel nel 1921; un lavoro sulla determinazione delle dimensioni molecolari e infine il primo articolo sul moto browniano.

Questi ultimi lavori, sulle dimensioni delle molecole e sul moto browniano, testimoniano dell'interesse di Einstein per due dei problemi centrali della fisica del primo novecento: quello della realtà degli atomi e delle molecole e quello della validità

della meccanica statistica in campo molecolare. Lo stesso Einstein, nella sua autobiografia scientifica, afferma: "Non conoscendo le precedenti ricerche di Boltzmann e Gibbs, ...ho sviluppato la meccanica statistica e la teoria cinetica molecolare della termodinamica. ...Mio maggiore intento era trovare fatti che potessero garantire il più possibile l'esistenza di atomi di grandezza misurabile. Nel far questo ho scoperto che, in accordo con la teoria atomistica, vi potrebbe essere un movimento di particelle sospese osservabili al microscopio senza sapere che le osservazioni relative ai moti browniani erano note già da lungo tempo. La cosa più semplice che se ne poteva dedurre si fondava sulla seguente considerazione. Se la teoria cinetica molecolare è sostanzialmente esatta... si può arrivare [da essa] ...alla legge del moto browniano. Il fatto che il risultato concordasse con l'esperienza... convinse gli scettici, a quel tempo molto numerosi (Ostwald, Mach), della realtà degli atomi." Il moto browniano, continua poi Einstein, era sì importante come metodo per contare le molecole, ma lo era di gran lunga di più perché consentiva di "dimostrare la realtà di quei moti che chiamiamo calore, con un semplice sguardo a microscopio." (5)

Il primo articolo di Einstein sul moto browniano ha per titolo: "Die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderten Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen" (Il moto previsto dalla teoria cinetica molecolare del calore per particelle in sospensione in fluidi in quiete). (6) Come si vede, il termine moto browniano è assente dal titolo; solo nel paragrafo iniziale Einstein scrive: "... è possibile che i moti qui esaminati coincidano con il cosiddetto moto molecolare browniano; le informazioni a me accessibili su quest'ultimo argomento sono però così imprecise che non sono in grado di farmi un'idea al riguardo." (7) Lo scopo del lavoro è chiaramente enunciato all'inizio da Einstein: "In questo articolo sarà mostrato che, in accordo con la teoria cinetica molecolare del calore, corpi di dimensioni visibili al microscopio sospesi in un liquido saranno dotati di movimenti di tale ampiezza da poter essere facilmente osservati al microscopio"; se ciò accade "è allora possibile un'esatta determinazione delle reali dimensioni atomiche." (8)

All'epoca in cui Einstein lavora sul moto browniano è ben nota la formula di Stokes relativa alla resistenza offerta da un fluido al moto di una sfera. Tale resistenza, se la velocità  $v$  della sfera è sufficientemente piccola, risulta essere proporzionale al coefficiente di attrito interno  $\eta$  del fluido, alla velocità  $v$  stessa e al raggio  $a$  della sfera

$$K = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot v \cdot a \quad (1)$$

La sfera raggiunge una velocità di regime quan-

do la resistenza  $K$  è uguale ed opposta alla forza motrice.

Un secondo, importante, strumento concettuale a disposizione di Einstein è la teoria della pressione osmotica delle soluzioni di J.H. Van't Hoff, teoria fino ad allora applicata alle molecole di soluto, dimensionalmente dello stesso ordine di grandezza di quelle del fluido solvente. Intorno al 1885, Van't Hoff, professore di chimica, mineralogia e geologia all'Università di Amsterdam, nel corso dei suoi studi sull'equilibrio chimico delle soluzioni, aveva trovato esservi un'analogia fondamentale con i gas solo che si fosse presa in considerazione, nelle soluzioni, la cosiddetta pressione osmotica. Gli esperimenti che avevano portato a questa scoperta si basavano sulle misure sull'osmosi attraverso membrane rigide, eseguite un decennio prima da W. Pfeiffer. Questi aveva costruito tali membrane rigide immergendo in un bagno di solfato di rame vasi di porcellana non smaltata contenenti una soluzione acquosa di ferrocianuro di potassio; il precipitato di ferrocianuro di rame che si veniva così a formare nei pori della porcellana costituiva appunto la membrana rigida. La teoria di Van't Hoff afferma essenzialmente che: data una mole di una sostanza disciolta, in un volume  $V^*$  che sia parte di una quantità di liquido solvente di volume totale  $V$ , se il volume  $V^*$  è separato dal solvente puro da una membrana semipermeabile (permeabile per il solvente, ma impermeabile per il soluto), su tale membrana si esercita una cosiddetta pressione osmotica  $p$ , che soddisfa all'equazione

$$p V^* = R T \quad (2)$$

dove  $T$  è la temperatura assoluta e  $R$  la costante dei gas.

Nel 1905 esistono dunque due teorie relative al moto di particelle nei fluidi: la teoria idrodinamica di Stokes riguardante la resistenza offerta al moto di una particella con velocità non troppo alta da parte di un liquido continuo (cioè quanto meno tale che il raggio delle sue molecole sia piccolo rispetto alle dimensioni della particella), e la teoria osmotica di Van't Hoff, che si riferisce in linea di principio a molecole di soluto in moto fra le molecole (dimensionalmente dello stesso ordine di grandezza) di solvente e che si inserisce essenzialmente nel quadro della teoria cinetica dei gas. In altre parole: la formula di Stokes è valida in situazioni in cui la turbolenza o il moto molecolare casuale non hanno alcun effetto significativo sul moto delle particelle sospese; la teoria osmotica invece è valida in situazioni in cui tutti i moti delle particelle del soluto devono essere attribuiti al moto molecolare casuale. Le due teorie sembrano dunque avere campi di applicabilità mutuamente escludentisi.

L'idea di Einstein è invece quella di ritenere che la teoria di Van't Hoff debba valere non solo per le molecole di soluto ma anche, genericamente, per particelle sospese, in quanto che, dal punto di vista della teoria cinetica molecolare, non doveva esserci alcuna differenza tra molecole di soluto e parti-celle in sospensione, se non nelle dimensioni. Se dunque  $n$  di tali particelle fossero contenute in un volume  $V^*$  separato dal resto del liquido da una parete semipermeabile, sulla parete ci sarebbe una pressione osmotica

$$p = \frac{RT}{V^*} \frac{n}{N} = \frac{RT}{N} v \quad (3)$$

ove  $N$  è il numero di Avogadro e dove  $v$  è indicata con  $v = n/V^*$  la concentrazione delle particelle (numero per unità di volume). Per Einstein dunque le particelle sospese si diffondono attraverso il liquido a causa della pressione osmotica che tende a spingerle da regioni ad alta concentrazione verso regioni a bassa concentrazione. Detta  $K$  la forza sulle singole particelle sospese dovuta alla pressione osmotica, originata quindi da un gradiente di concentrazione, in condizioni di equilibrio dinamico, essa dipende solo dal punto e non dal tempo. Nell'ipotesi, dovuta a ragioni di semplicità, che essa si eserciti solo lungo una direzione (asse  $x$ ), imponendo che la variazione dell'energia libera si annulli per uno spostamento virtuale delle particelle sospese, Einstein arriva alla

$$-K v + \frac{RT}{N} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

L'idea di base di Einstein è che la forza osmotica sia in equilibrio con la forza viscosa che tende a frenare il moto della particella secondo l'idrodinamica (ed è questa in fondo la posizione rivoluzionaria di Einstein: quella di pensare che una resistenza viscosa possa essere equilibrata da una forza dovuta ai moti caotici molecolari). Ammettendo che le particelle sospese siano sferette di raggio  $a$ , Einstein potrebbe usare direttamente la formula di Stokes, che, insieme con la (4) da:

$$6 \pi \eta a v = \frac{RT}{N} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5)$$

Si avrebbe così una relazione fra diverse quantità in linea di principio misurabili e quindi verificabile sperimentalmente.

Einstein non propone però la (5) come risultato della sua teoria da sottoporre a verifica. Egli considera la formula di Stokes (1) per ricavarne la velocità che, moltiplicata per la concentrazione, da il numero  $n$  di particelle che attraversano l'area unitaria nell'unità di tempo. Uguaglia poi questa

espressione alla forma convenzionale per la velocità di diffusione e ottiene

$$\frac{v K}{6 \pi \eta a} = D \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6)$$

dove  $D$  è il coefficiente di diffusione che, dalla (4), risulta quindi:

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6 \pi \eta a} \quad (7)$$

equazione questa che lega il coefficiente di diffusione con la viscosità nel regime di Stokes.

Per mettere in relazione il processo di diffusione con i moti irregolari delle particelle, Einstein suppone che il moto di ogni singola particella sia indipendente da quello delle altre, e che "i moti di una medesima particella dopo diversi intervalli di tempo debbano essere considerati come processi mutuamente indipendenti, fintanto che tali intervalli siano pensati non troppo piccoli." (9) Più specificamente, egli suppone indipendenti i moti di una particella in due intervalli di tempo successivi  $\tau$  (10). Se  $n$  sono le particelle sospese, quelle che nell'intervallo di tempo  $\tau$  subiscono uno spostamento compreso fra  $\Delta$  e  $\Delta+d\Delta$  sono date da:

$$dn = n \Phi(\Delta) \cdot d\Delta \quad (8)$$

dove  $\Phi(\Delta) d\Delta$  rappresenta la probabilità che una particella si sposti nell'intervallo di tempo  $\tau$  di un tratto compreso fra  $\Delta$  e  $\Delta+d\Delta$ . La concentrazione è una funzione dello spazio e del tempo  $v = f(x,t)$ , il cui valore, dopo un tempo  $\tau$ , può essere calcolato mediante la funzione di distribuzione  $\Phi$ ; cioè  $f(x, t+\tau)$  dipenderà dai valori di  $f(x+\Delta, t)$  per tutti i possibili  $\Delta$ , pesati dalla funzione  $\Phi$ . Se  $\tau$  è molto piccolo (ma sufficientemente grande da poter ritenere che il moto di una particella durante esso non dipenda dalla storia precedente il suo inizio) e se si considerano solo piccoli valori di  $\Delta$ , si ottiene, sviluppando la  $f(x+\Delta, t)$  in serie di potenze di  $\Delta$ , l'equazione differenziale

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (9)$$

dove

$$D = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2} \Phi(\Delta) d\Delta \quad (10)$$

Tenendo conto che le particelle si muovono indipendentemente l'una dall'altra, Einstein può interpretare la  $x$  non come la reale coordinata spaziale della particella, bensì come lo spostamento dalla

posizione che aveva al tempo  $t = 0$ . E allora la soluzione della (10) è

$$f(x,t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi D}} \frac{e^{-x^2/4Dt}}{\sqrt{t}} \quad (11)$$

Con l'aiuto della (11) ora Einstein può calcolare facilmente il valor quadratico medio dello spostamento di una particella nella direzione  $x$  e ottenere:

$$\lambda_x = \sqrt{\bar{x}^2} = \sqrt{2Dt} \quad (12)$$

Lo spostamento medio è dunque proporzionale alla radice quadrata del tempo. Sostituendo a  $D$  il valore dato dalla (7), si ha:

$$\lambda_x = \sqrt{t} \sqrt{\frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi \eta a}} \quad (13)$$

Questo è il risultato finale che, dice Einstein, può servire, noti  $N$ ,  $R$ ,  $T$ ,  $\eta$  e  $a$ , per calcolare  $\lambda_x$  e confrontarlo poi con il dato sperimentale. Ma, dice ancora Einstein, la relazione trovata può essere usata per la determinazione del numero di Avogadro  $N$  e anzi, a conclusione della sua memoria, egli esprime la speranza che qualche ricercatore arrivi presto a tale determinazione sperimentale, così importante per la teoria cinetica del calore.

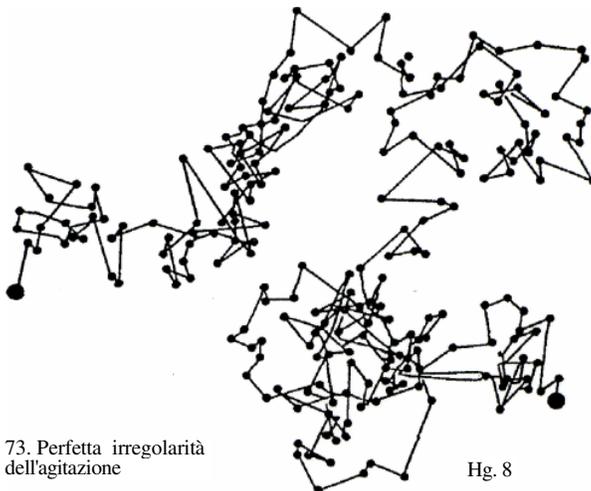
### Conclusioni

La formula (13) è di estrema importanza sotto molti aspetti. Contrariamente a quanto fatto fino ad allora dai ricercatori interessati al moto browniano, Einstein non prende in considerazione il valor quadratico medio della velocità delle parti-

celle sospese. In articoli successivi (11) sul moto browniano in cui richiama l'attenzione dei ricercatori sulla (13), egli sottolinea anzi l'impossibilità di misurare tale valore. Gli impulsi ricevuti dalla particella sono infatti del tutto indipendenti dalla originale direzione del moto e della velocità, e la velocità media di una particella in un dato intervallo di un tempo può variare enormemente in modulo e direzione, senza tendere ad un particolare valore al decrescere del tempo di osservazione. Con Einstein dunque gli sperimentatori comprendono che fino a quel momento avevano tentato di misurare la grandezza sbagliata.

Quel che si deve misurare è dunque la lunghezza del segmento rettilineo congiungente il punto di partenza e il punto di arrivo della particella nel tempo considerato, cioè lo spostamento (medio). Tale lunghezza è, come s'è visto, proporzionale alla radice quadrata del tempo, cioè il rapporto  $x^2/t$  è costante; il valore della costante dipenderà dalla maggiore o minore agitazione e caratterizza l'attività del moto browniano.

Il fisico francese J. Perrin sottoporrà nel 1908 la (13) ad un accurato controllo sperimentale, impiegandola per calcolare il numero di Avogadro e verificando in tal modo l'esattezza di tutte le ipotesi molecolari in essa contenute. (12) Per i suoi esperimenti Perrin si serve di emulsioni di gommagutta trattata con alcool e centrifugata, in modo da ottenere granuli di pari diametro, o anche di emulsioni di mastice in sfere di diametro anche molto maggiore di quelle di gommagutta. Perrin utilizza un microscopio ad immersione che permette di conoscere meglio la temperatura dell'emulsione e quindi anche la viscosità. L'osservazione al microscopio è fatta restringendo il campo visivo, fino ad avere a fuoco non più di cinque o sei granuli (con un'emulsione molto diluita), e si segue il movimento di uno di essi per un tempo determinato. In figura è riportata un'illustrazione, tratta da un testo



73. Perfetta irregolarità dell'agitazione

Hg. 8

di Perrin (13), allo scopo di dare un'idea della complessità della traiettoria di un granulo. I risultati degli esperimenti di Perrin sono indicati nella tabella. (14) Come si vede, i valori di  $N$  sono tutti molto vicini fra loro e concordano con il valore tro-

vato da Perrin con altri metodi. "Questa notevole concordanza, conclude lo scienziato francese, prova l'esattezza della formula di Einstein e conferma in modo clamoroso la teoria molecolare." (15)

100%	Natura dell'emulsione	Raggi dei granelli	Massa $m \cdot 10^{15}$	Spostamenti usati	$N/10^{22}$
1	I. Granelli di gommagutta	0,50	600	100	80
1	II Granelli analoghi	0,212	48	900	69,5
4a5	III Stessi granelli nell'acqua zuccherata (35%) (temperatura poco nota)	0,212	48	400	55
1	IV. Granelli di mastice	0,53	650	1000	72,5
1,2	V. Grani enormi (mastice) in soluzione di urea (27%)	5,50	750000	100	78
125	VI. Granelli di gommagutta in glicerina (1/10 d'acqua)	0,385	290	100	64
1	VII Granelli di gommagutta perfettamente uguali	0,367	246	1500	68,8

Una difficoltà reale è quella di non perdere di vista il granello, che sale e scende senza sosta. Gli spostamenti *verticali* sono stati misurati solo nella serie VI.

## NOTE

[1] In A. Einstein, *Autobiografia Scientifica*, Borin-ghieri. Torino, 1979; p. 70.

[2] Come riferimento generale sull'argomento, si veda, per esempio: S.G. Brush, *The Kind of Motion we call Heat*, North Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1976; Book 2, pp. 655-701.

[3] In S.G. Brush, op. cit.; p. 658.

[4] *Ibidem*; p. 665.

[5] A. Einstein, op. cit. in Rif. [1]; pp. 31-32,

[6] A. Einstein, "Die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen", *Annalen der Physik*, 17, 549-560 (1905). Traduzione inglese in: A. Einstein, *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*, Dover Publ., 1926 (ristampa del 1956); pp. 1-18.

[7] A. Einstein, *Investigations...*, op. cit. in Rif. [6]; p. 1.

[8] *Ibidem*.

[9] *Ibidem*; pp. 12-13.

[10] Qui Einstein segue il modo di ragionare tipico del problema del random-walk. Vedi: B. Carazza, "The history of the random-walk problem: considerations on the interdisciplinarity in modern physics", *Rivista del Nuovo Cimento*, 7, 419-427 (1977).

[11] A. Einstein, "Theoretische Bemerkungen über die Brownsche Bewegung", *Zeitschrift für Elektrochemie*, 13, 41-42 (1907); trad. inglese in: A. Einstein, *Investigations...*, op. cit. in Rif. [6], pp. 63-67.

A. Einstein, "Elementare Theorie der Brownschen Bewegung", *Zeitschrift für Elektrochemie*, 14, 235-239 (1908); traduzione italiana in *La Fisica nella Scuola*, 2, 7-11 (1979).

[12] J. Perrin, *Gli Atomi*, Editori Riuniti, Roma, 1971.

[13] La figura è tratta da J. Perrin, op. cit.; p. 141.

[14] *Ibidem*; p. 147.

Perrin indica con  $z$  la viscosità del liquido.

[15] *Ibidem*; p. 148.