

# VERSO LA SECONDA PROVA DI MATEMATICA 2017

## PROVA DI VERIFICA

 3 ore

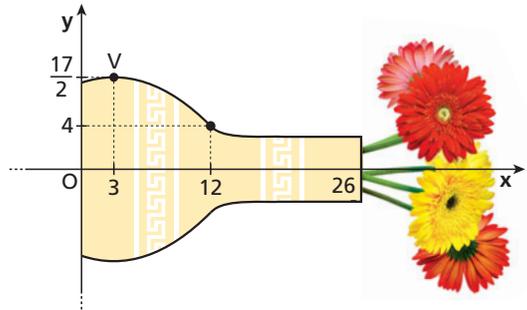
Risolvi uno dei problemi e rispondi a tre quesiti.

### Problemi

**1** Il vaso in figura è rappresentata una sezione di un vaso da fiori, dove i dati sono in cm. Il suo profilo  $f(x)$  è costituito da:

- un arco di parabola per  $0 \leq x \leq 12$  di vertice  $V$ ;
- un arco della curva di equazione  $y = e^{12-x} + k$  per  $12 < x \leq 26$ .

- a. Determina l'equazione di  $f(x)$ .
- b. Verifica che si tratta di una funzione continua e derivabile in tutto il suo dominio.
- c. Calcola l'area della sezione del vaso rappresentata in figura, esprimendola in  $\text{dm}^2$ .
- d. Supponi ora che il vaso abbia un profilo diverso, di equazione  $g(x) = \frac{ax+b}{x+1}$ . Determina  $a$  e  $b$  in modo che la base di appoggio del vaso rimanga la stessa e che  $g(x)$  abbia lo stesso asintoto del profilo  $f(x)$ . Calcola quanto dovrebbe essere alto il vaso affinché l'area della sezione rimanga invariata.
- e. Vuoi raddrizzare il vaso, scambiando  $x$  con  $y$ ; indica per quale dei due profili  $f(x)$  e  $g(x)$  è possibile scrivere l'espressione di  $x$  in funzione di  $y$  e scrivi tale espressione.



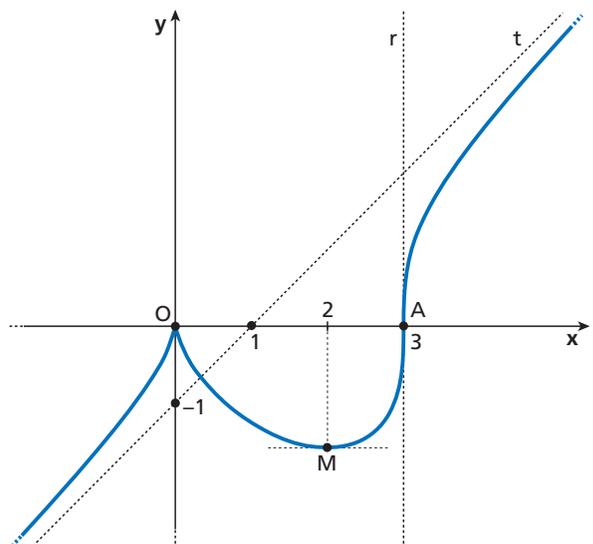
**2** La funzione  $f(x)$ , in figura, è tangente all'asse  $y$  in  $O$ , alla retta  $r$  in  $A(3; 0)$  e ammette la retta  $t$  come asintoto obliquo. Basandoti sui dati deducibili dal grafico:

- a. determina il dominio, il segno e gli eventuali zeri della funzione  $f'(x)$ ;
- b. calcola il valore dei limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x), \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x);$$

- c. determina gli eventuali asintoti della funzione  $f(x)$  e studia la crescita di  $f'(x)$ .
- d. Spiega perché  $f'(x)$  ha almeno un punto  $x_F$  di flesso e indica in quale intervallo si trova  $x_F$ . Utilizzando le informazioni fornite, traccia un grafico indicativo di  $f'(x)$ .
- e. Se il grafico di  $f(x)$  ha equazione del tipo  $y = \sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx}$ , trova i valori di  $a$ ,  $b$ ,  $c$  utilizzando i dati della figura.



## Quesiti

**1** Determina il valore del parametro reale  $a$  e la funzione  $f(x)$ , sapendo che:

a.  $f''(x) = a + \ln x$ ;

b.  $f'(1) = -1$ ,  $f(1) = -\frac{1}{4}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

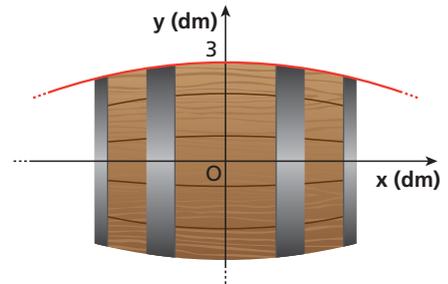
Trova l'equazione della retta tangente al grafico di  $f(x)$  nel suo punto di flesso.

**2** Determina il valore del parametro  $k$  in modo che la parabola di equazione  $y = kx^2 - (6k + 1)x + (5k + 1)$  risulti tangente al grafico della funzione  $f(x) = \ln x$  nel suo punto di intersezione con l'asse  $x$  e calcola l'area della regione delimitata da tale parabola e dal grafico di  $f(x)$  nell'intervallo  $[1; 4]$ .

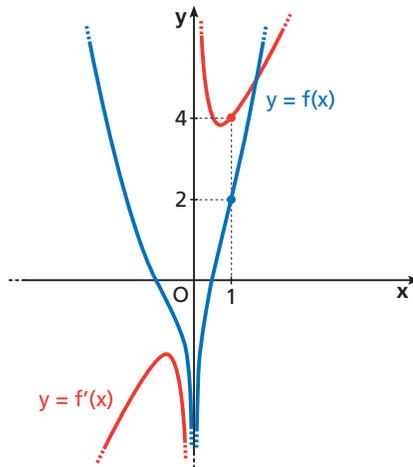
**3** **Botte piccola, vino buono** Una botte *barrique* alta 80 cm ha il diametro di base di 50 cm e il diametro massimo di 60 cm. Può essere ottenuta ruotando un arco di parabola attorno all'asse  $x$ , come mostrato nella figura.

a. Determina l'equazione della parabola.

b. Quanti litri di vino può contenere la botte?



**4** **LEGGI IL GRAFICO** Determina l'equazione della funzione  $f(x)$ , sapendo che  $f'(x)$  ha il grafico mostrato in figura e che  $f''(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$ .



**5** Ricava l'equazione del luogo  $\gamma$  descritto dal punto di massimo relativo della curva  $\lambda$  di equazione  $y = x^2 e^{ax}$  al variare di  $a \in \mathbb{R}$ . Verifica che la curva  $\lambda$  presenta un minimo relativo e assoluto per  $x = 0$ , qualunque sia il valore di  $a \in \mathbb{R}$ .

**6** **REALTÀ E MODELLI** **Scena del crimine** La polizia scientifica sta effettuando i rilievi su una vittima di omicidio. Il cadavere si trova in un luogo in cui la temperatura ambiente è di  $25^\circ\text{C}$ . Si presuppone che la temperatura del cadavere  $T(t)$  vari nel tempo secondo la legge empirica  $T'(t) = -\frac{6}{5}[T(t) - 25]$ , dove  $t$  è il tempo in ore misurato a partire dall'ora del decesso.

a. Verifica che le soluzioni dell'equazione differenziale sono del tipo  $T(t) = 25 + Ce^{-\frac{6}{5}t}$ .

b. Determina il valore di  $C$  supponendo che all'ora del decesso il corpo avesse una temperatura di  $36,5^\circ\text{C}$ .

c. Se il cadavere è stato rinvenuto alle 2:00, quando la sua temperatura era di  $30^\circ\text{C}$ , qual è l'ora presunta del decesso?



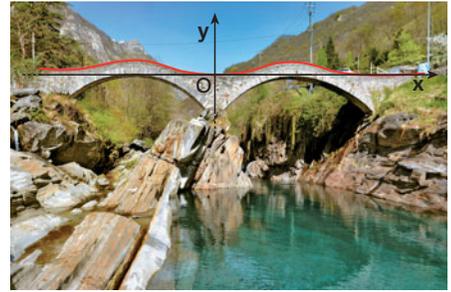
**7** Il **Ponte dei Salti** Il profilo superiore del Ponte dei Salti che si trova a Lavertezzo, in Svizzera, è approssimabile con il grafico di una funzione che ha le seguenti caratteristiche:

- è simmetrica rispetto all'asse  $y$ ;
- ha un minimo nell'origine e due massimi nei punti  $(\pm 7; 2)$ .

Tali caratteristiche sono tipiche di una funzione del tipo

$$f(x) = h(x) e^{-k \cdot h(x)},$$

dove  $h(x) = ax^2 + bx + c$ . Determina una possibile espressione analitica di  $f(x)$  che rispetti le due condizioni.



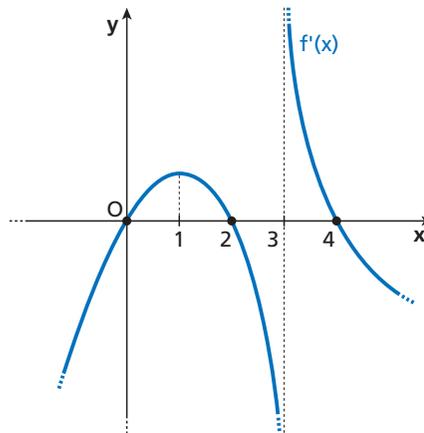
**8** Tra le sfere di centro  $C(1; 2; -1)$  determina quella tangente alla retta  $r$  di equazione

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

e trova le coordinate del punto di tangenza.

Verifica che la sfera trovata è tangente anche al piano  $\alpha$  di equazione  $x - 2y - 2z = 8$ .

**9** Nella figura è rappresentato il grafico della derivata  $f'(x)$  di una funzione  $f(x)$ , continua in tutto  $\mathbb{R}$ , che passa per il punto  $(3; 1)$ .



Descrivi le principali caratteristiche di  $f(x)$ , indicando i punti di massimo e di minimo, e traccia il suo grafico. Disegna inoltre il grafico di  $f''(x)$ .

**10** Una fabbrica produce lettori MP3. In base alle statistiche di produzione, i lettori funzionano correttamente nel 95% dei casi. Durante un controllo a campione, se ne selezionano casualmente 10. Calcola la probabilità dei seguenti eventi.

- A: «Solo i primi 8 lettori testati funzionano correttamente».
- B: «Vi sono al massimo 9 lettori funzionanti».
- C: «Almeno 8 lettori funzionano correttamente».