LIMITI E CONFRONTO LOCALE

Esercizi svolti

1. Calcolare i seguenti limiti:

$a)\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-x^3+1}{\sqrt{x}+x^2-x^3}$ $\qquad b)\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)$

$c)\ \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^3-x^2+4x}{x^5-x}$ $\qquad d)\ \displaystyle\lim_{x\to1^+} \frac{x^4-x^3+1}{1-x^3}$

$e)\ \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-1}}$ $\qquad f)\ \displaystyle\lim_{x\to2} \frac{2x^3-5x^2-4x+12}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}$

$g)\ \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ $\qquad h)\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

$i)\ \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$ $\qquad l)\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)$

$m)\ \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin x^4}{\sin^2 x^2}$ $\qquad n)\ \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x}$

$o)\ \displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$ $\qquad p)\ \displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

$q)\ \displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2}$ $\qquad r)\ \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\arccos x-\frac{\pi}{2}}{x}$

$s)\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{\sqrt{x}-1}$ $\qquad t)\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+M(x)^*}{x+\sqrt{x}}$

$u)\ \displaystyle\lim_{x\to-1^\pm} [x^3+1]^*$ $\qquad v)\ \displaystyle\lim_{x\to1^\pm} [x^4-2x^3-x+2]^*$

$x)\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{[3x+1]^*}{\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad y)\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5+\cos x}}{x^2+1}.$

* $[x]$ e $M(x)$ denotano rispettivamente la parte intera e la mantissa di x.

2. Dire se esistono (ed eventualmente calcolare) i seguenti limiti:

$a)\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}+\cos x\right)$ $\qquad b)\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\cos x$

$c)\ \displaystyle\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$ $\qquad d)\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,M(x).$

3. Determinare $\lambda\in\mathbb{R}$ in modo che

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2+\lambda}+x\right)=2.$$

4. Calcolare i seguenti limiti:

$a)\ \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\pi}{x}\right)^{2x}$

$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x)}{x^2+2x}$

$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+3\sin 2x}{x-2\sin 3x}$

$d)\ \lim_{x\to 0^\pm}\frac{x^2-\text{tg }(2x^3)}{2x^5+5\sin^3 x}$

$e)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1}{x}$

$f)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2}}{x^3+\sqrt{x}}$

$g)\ \lim_{x\to 0}\frac{\pi^x-3^x}{x}$

$h)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}-1}{5^x-1}$

$i)\ \lim_{x\to 0^\pm}\frac{\sin(2^x-1)}{(2^x-1)^2}$

$l)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x^3}-x^6}{4x^6-\sqrt{x^4+x^3}}$

$m)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2^{2x}+2^{-x}}{(2^x-1)^2}$

$n)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3(2^x-2^{-x})}{3^x+3^{-x}}$

$o)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\log^3 x+x\log^7 x}{1+x^3}$

$p)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x\log^5 x+\sqrt[4]{x}\log x}{\sqrt{x}}$

$q)\ \lim_{x\to 0^+}\left(x^x+x^{-\frac{1}{x}}\right)$

$r)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

$s)\ \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

$t)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$

$u)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\, 3^x)}{x}$

$v)\ \lim_{x\to+\infty}e^{-x}\left(e+\frac{2}{x}\right)^x$

$x)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\text{tg }^3 x}-1}{x(\cos x-e^{x^2})}$

$y)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(e+x)-1}{x}$

$w)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\cos x)}{x\sin x}$

$z)\ \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{4+x}-1\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

5. Verificare che $f(x)=\sqrt{x+5}-\sqrt{5}$ e $g(x)=\sqrt{x+7}-\sqrt{7}$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x\to 0$ e determinare $k\in\mathbb{R}$ tale che $g(x)\sim k\,f(x)$ $(x\to 0)$.

6. Confrontare tra loro gli infinitesimi $x-2$, $\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}$, $(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2$ per $x\to 2$.

7. Calcolare l'ordine di infinitesimo α e la parte principale kx^α rispetto a x per $x\to 0$

delle seguenti funzioni:

$a)\ e^{3x^4} - 1$ $\qquad$ $b)\ e^{\sqrt{x^2+1}} - e$

$c)\ \dfrac{1 - \cos x}{\sqrt{x} + x^2}$ $\qquad$ $d)\ \log(\cos x)$

$e)\ \sqrt[3]{x + x^2} - \sqrt[3]{x} + x^2$ $\qquad$ $f)\ e^{e^x} - e^{\cos x}$

$g)\ \log(x+3) - \log 3$ $\qquad$ $h)\ \sin(2x^2)\left(\sqrt{1+3x} - 1\right)$

$i)\ \sqrt{1 - \cos(x^2)}$ $\qquad$ $l)\ \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$

$m)\ \dfrac{\sin x + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$ $\qquad$ $n)\ x^2 + \sin(2x^3) + 1 - e^{-x^2}$

$o)\ \sin\left(\pi\sqrt{1+x}\right)$ $\qquad$ $p)\ \dfrac{1 + \sin x}{1 - x} - 1$

$q)\ \dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{1+2x} - 1$ $\qquad$ $r)\ \log\left(\sqrt{9+x} - 2\right).$

8. Determinare l'ordine di infinitesimo α e la parte principale $\frac{k}{x^\alpha}$ rispetto a $\frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$ delle seguenti funzioni:

$a)\ \dfrac{2x^2 + \sqrt[3]{x}}{x^3}$ $\qquad$ $b)\ \text{arctg}\ \dfrac{3}{x^2}$

$c)\ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $d)\ \sqrt{\dfrac{x-3}{x}} - 1$

$e)\ e^{\frac{x+1}{x}} - e$ $\qquad$ $f)\ \log\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right).$

9. Determinare l'ordine di infinitesimo α e la parte principale $k(x - x_0)^\alpha$ rispetto a $x - x_0$ per x che tende al valore indicato x_0 delle seguenti funzioni:

$a)\ \log x - \log 2 \quad (x \to 2)$ $\qquad$ $b)\ e^x - e \quad (x \to 1)$

$c)\ 1 - \sin x \quad (x \to \pi/2)$ $\qquad$ $d)\ 1 + \cos(x^2) \quad (x \to \sqrt{\pi}).$

10. Determinare l'ordine di infinito α e la parte principale kx^α rispetto a x per $x \to +\infty$ delle seguenti funzioni:

$a)\ \dfrac{x^{3/2} + 5x^2}{1 + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$ $\qquad$ $b)\ \sqrt{x^4 + x^3} - x^2 + \sqrt{x}.$

11. Determinare il dominio e gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni:

$a)\ f(x) = \dfrac{x^2 - (x+1)|x-2|}{2x+3}$ $\qquad$ $b)\ f(x) = |x|e^{\frac{x+1}{x}}.$

12. Determinare, per $x \to +\infty$, l'asintoto di

$$f(x) = \log(e^x + x).$$

Ha senso cercare l'asintoto per $x \to -\infty$?

13. Confrontare fra loro i seguenti infiniti per $x \to +\infty$ mettendoli in ordine crescente di infinito:

$$2^x,\ x^x,\ \frac{x^2}{\log^{100} x},\ x\log^{10} x,\ 2^{5^x},\ x^2,\ 2^x \log x,\ x^2 2^x.$$

Svolgimento

1. a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - x^3 + 1}{\sqrt{x} + x^2 - x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{-x^3} = -\infty.$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 + 4x^2}{(3x^2 - 4)(3x + 2)} = \frac{2}{9}.$$

c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x^2 + 4x}{x^5 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x + o(x)}{-x + o(x)} = -4.$$

d)

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^4 - x^3 + 1}{1 - x^3} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

e)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{2x^2 - 1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{2}|x|} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2x^2}}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}.$$

f) Decomponendo in fattori numeratore e denominatore con la regola di Ruffini otteniamo

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 12}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2(2x+3)}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{7}{5}.$$

g) Moltiplicando e dividendo per la somma delle radici si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + x - \cancel{1} + x}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1.$$

Si può anche procedere utilizzando lo sviluppo $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ per $x \to 0$.

h) Procedendo come nell'esercizio precedente otteniamo

$$\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} + 1} + 1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

i) Raccogliendo il termine $\sqrt[3]{1-x}$ si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{1-x}\ \frac{\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{2x}{1-x}} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\ \frac{2x}{1-x}\ \frac{1}{x} = \frac{2}{3},$$

grazie allo sviluppo $\sqrt[3]{1+t} = 1 + \frac{1}{3}t + o(t)$ per $t \to 0$.

l) Procedendo come nell'esercizio precedente si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)=\sqrt{x}\sqrt[3]{x-1}\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}-1\right)=$$

$$-\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x-1}}-1\right)=-\sqrt{x}\,\frac{1}{3}\,\frac{2}{x-1}=0.$$

m) Utilizzando il limite fondamentale $\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$, il suo reciproco, e il teorema del cambiamento di variabile nei limiti, otteniamo

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x^4}{\sin^2 x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^4}{x^4}\left(\frac{x^2}{\sin x^2}\right)^2=1\cdot1=1.$$

Alternativamente possiamo usare lo sviluppo $\sin t=t+o(t)$ per $t\to0$.

n) Ricordando il limite fondamentale $\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}$ otteniamo

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\cdot\left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)^2\cdot\frac{4}{9}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}.$$

Possiamo anche usare lo sviluppo $\cos t=1-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)$ per $t\to0$.

o) Facendo il cambio di variabili $x-\pi=t$ otteniamo

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi+t)}{t}=-\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=-1.$$

p) Ponendo $x-\frac{\pi}{2}=t$ otteniamo

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{t\to0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+t)}{t}=-\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=-1.$$

q) Ponendo $\sqrt[4]{x+17}=t$ abbiamo $x=t^4-17$ e quando x tende a -1, t tende a 2:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2}=\lim_{t\to2}\frac{t^4-16}{t-2}=\lim_{t\to2}(t+2)(t^2+4)=32.$$

r) Poniamo $x=\cos t$ da cui $t=\arccos x$. Quando x tende a zero, t tende a $\frac{\pi}{2}$, e ci riconduciamo cosı̀ al reciproco del limite p):

$$\lim_{x\to0}\frac{\arccos x-\frac{\pi}{2}}{x}=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{t-\frac{\pi}{2}}{\cos t}=-1.$$

s)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos x}{\sqrt{x}-1}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty.$$

Abbiamo usato il fatto che $\cos x$ è limitata e $\frac{1}{x}$ è infinitesima per $x \to +\infty$, e dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0.$$

t) La funzione mantissa è limitata, essendo $0 \le M(x) < 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Da questo segue

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + M(x)}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{M(x)}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = 1.$$

u) Disegnando il grafico di $t = x^3 + 1$, oppure studiandone il segno, vediamo che quando x tende a $-1^{\pm}$ la variabile t tende rispettivamente a $0^{\pm}$. Cambiando variabile e ricordando il grafico della parte intera otteniamo

$$\lim_{x\to-1^{\pm}} [x^3+1] = \lim_{t\to 0^{\pm}} [t] = \begin{cases} 0 & \text{se } t \to 0^+ \\ -1 & \text{se } t\to 0^-. \end{cases}$$

v) Studiando il segno di $t = x^4 - 2x^3 - x + 2 = (x-2)(x^3-1)$ vediamo che quando x tende a $1^{\pm}$ la t tende rispettivamente a $0^{\mp}$, e dunque

$$\lim_{x\to1^{\pm}} [x^4 - 2x^3 - x + 2] = \lim_{t\to 0^{\mp}} [t] = \begin{cases} -1 & \text{se } t \to 0^- \\ 0 & \text{se } t\to 0^+. \end{cases}$$

x) Ricordando che $t - 1 < [t] \le t \ \forall t \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} < \frac{[3x+1]^*}{\sqrt{x^2+1}} \le \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Passando al limite e utilizzando il teorema del doppio confronto si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[3x+1]^*}{\sqrt{x^2+1}} = 3.$$

y) Essendo $\sqrt{5+\cos x}$ limitata e $\frac{1}{x^2+1}$ infinitesima per $x \to +\infty$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5+\cos x}}{x^2+1} = 0.$$

2. a) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} + \cos x\right) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(1 + \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

b) Il limite non esiste. Infatti posto $f(x) = \sqrt{x}\cos x$ e prese le due successioni $x_n = 2n\pi$ e $x'_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ si ha $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = +\infty$, ma $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$, mentre $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = 0$.

c) Essendo $\sin \frac{1}{x}$ limitata e $\sqrt{x}$ infinitesima per $x \to 0^+$, si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} = 0.$$

d) Il limite non esiste. Posto $f(x) = x\, M(x)$ e $x_n = n$, $x'_n = n + \frac{1}{2}$, si ha $f(x_n) = 0$ e $f(x'_n) = \frac{1}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e dunque $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$, mentre $\lim_{n \to \infty} f(x'_n) = \frac{1}{2}$.

3. Calcoliamo il limite in funzione del parametro λ. Poichè x tende a $-\infty$ possiamo supporre $x < 0$ e quindi $|x| = -x$. Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x^2 + \lambda} - x$ otteniamo

$$\sqrt{x^2 - 1} \left(\sqrt{x^2 + \lambda} + x \right) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} \cdot \lambda}{\sqrt{x^2 + \lambda} - x} = \frac{\lambda |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{|x| \left(\sqrt{1 + \frac{\lambda}{x^2}} + 1 \right)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda}{2}.$$

Otteniamo così $\lambda = 4$.

4. a)

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{\pi}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \to -\infty} \left[\left(1 - \frac{\pi}{x}\right)^{x} \right]^2 = \left(e^{-\pi}\right)^2 = e^{-2\pi}.$$

b) Ricordando che $\log(1 + t) = t + o(t)$ per $t \to 0$, otteniamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + 3x)}{x^2 + 2x} \lim_{x \to 0} \frac{3x + o(x)}{2x + o(x)} = \frac{3}{2}.$$

c) Si ha $\sin t = t + o(t)$ per $t \to 0$, quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3 \sin 2x}{x - 2 \sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{6x + o(x)}{-5x + o(x)} = -\frac{6}{5}.$$

d) Essendo $\operatorname{tg}\, t = t + o(t)$ per $t \to 0$, si ha $\operatorname{tg}\, (2x^3) = 2x^3 + o(x^3) = o(x^2)$ per $x \to 0$; inoltre $\sin^3 x = (x + o(x))^3 = x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$, quindi

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{x^2 - \operatorname{tg}\, (2x^3)}{2x^5 + 5 \sin^3 x} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{x^2 + o(x^2)}{5x^3 + o(x^3)} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{1}{5x} = \pm\infty.$$

e) Posto $-2x = t$ e ricordando il limite fondamentale $\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, abbiamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x} = -2 \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = -2.$$

f) Utilizziamo lo sviluppo $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{x^2}}{x^3 + \sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \left(1 + x^2 + o(x^2)\right)}{\sqrt{x} + o(\sqrt{x})} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{\sqrt{x} + o(\sqrt{x})} = 0.$$

g) Ricordando che $a^x = 1 + x\log a + o(x)$ per $x \to 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\pi^x - 3^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + x\log\pi - \cancel{1} - x\log 3 + o(x)}{x} = \log\pi - \log 3 = \log\frac{\pi}{3}.$$

h) Si ha $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + o(t)$ per $t \to 0$, da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+4x} - 1}{5^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x + o(x)}{x\log 5 + o(x)} = \frac{2}{\log 5}.$$

i) Posto $2^x - 1 = t$ è facile vedere che $t \to 0^\pm$ quando $x \to 0^\pm$, dunque

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sin(2^x - 1)}{(2^x - 1)^2} = \lim_{t\to 0^\pm} \frac{\sin t}{t^2} = \lim_{t\to 0^\pm} \left(\frac{\sin t}{t}\right)\frac{1}{t} = \pm\infty.$$

l) Notiamo che $\sqrt{x^4 + x^3} = x^{3/2}\sqrt{1+x} = x^{3/2} + o(x^{3/2})$ per $x \to 0$, dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x^3} - x^6}{4x^6 - \sqrt{x^4 + x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}\,x^{3/2} + o(x^{3/2})}{-x^{3/2} + o(x^{3/2})} = -\sqrt{2}.$$

m) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{2x} + 2^{-x}}{(2^x - 1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^{\cancel{2}x}\left(1 + 2^{-3x}\right)}{2^{\cancel{2}x}\left(1 - 2^{-x}\right)} = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2^{2x} + 2^{-x}}{(2^x - 1)^2} = \frac{+\infty}{1} = +\infty.$$

n) Ricordiamo che per $x \to +\infty$ la funzione a^x con $a > 1$ è un infinito di ordine superiore a x^α, qualunque sia $\alpha > 0$. Si ha allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(2^x - 2^{-x}\right)}{3^x + 3^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\, 2^x}{3^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\left(\frac{3}{2}\right)^x} = 0.$$

Analogamente per $x \to -\infty$ si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(2^x - 2^{-x}\right)}{3^x + 3^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3\, 2^{-x}}{3^{-x}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^3}{\left(\frac{3}{2}\right)^t} = 0.$$

o) Per $x \to +\infty$ la funzione $(\log x)^\alpha$ è un infinito di ordine inferiore a x^β $\forall \alpha, \beta > 0$, quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\log^3 x + x\log^7 x}{1 + x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\log^3 x}{x^{\cancel{3}}}\, \frac{1 + \frac{\log^4 x}{x}}{1 + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log^3 x}{x} = 0.$$

p) Ricordando che $\lim_{x\to 0} x^\alpha |\log x|^\beta = 0\ \forall \alpha,\beta>0$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\log^5 x + \sqrt[4]{x}\log x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}\log^5 x + \frac{\log x}{x^{1/4}}\right) = 0 + (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty.$$

q) Ricordiamo che $f(x)^{g(x)} \equiv e^{g(x)\log f(x)}$, quindi

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^x + x^{-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(e^{x\log x} + e^{-\frac{1}{x}\log x}\right) = e^0 + e^{+\infty} = 1+\infty = +\infty.$$

r) Si ha $\cos\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$ per $x\to+\infty$, e $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t\to 0$, dunque

$$\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{x^2\log\cos\frac{1}{x}} = e^{x^2\log\left(1-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)} = e^{x^2\left(-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1/2}.$$

s)

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log\sqrt{1+x}}{\sin x}} \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{2}\frac{\log(1+x)}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{x+o(x)}{2x+o(x)}} = e^{1/2}.$$

t)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-\sqrt{1-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+3x+o(x)-\left(1-\frac{1}{2}x+o(x)\right)}{x+o(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{2}x+o(x)}{x+o(x)} = \frac{7}{2}.$$

u) Essendo $3^x = 1 + x\log 3 + o(x)$ per $x\to 0$ e $\sin t = t+o(t)$ per $t\to 0$, si ha

$$\sin(\pi\, 3^x) = \sin(\pi + \pi x\log 3 + o(x)) = -\sin(\pi x\log 3 + o(x)) = -\pi x\log 3 + o(x),$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\, 3^x)}{x} = -\pi\log 3.$$

v)

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\left(e+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{ex}\right)^x = e^{2/e}.$$

x) Essendo $\mathrm{tg}\,^3 x = (x+o(x))^3 = x^3 + o(x^3)$ per $x\to 0$, abbiamo

$$\frac{e^{\mathrm{tg}\,^3 x}-1}{x(\cos x - e^{x^2})} = \frac{e^{x^3+o(x^3)}-1}{x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(1+x^2+o(x^2))\right)} = \frac{x^3+o(x^3)}{-\frac{3}{2}x^3+o(x^3)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{2}{3}.$$

y) Notiamo che $\log(e+x)-1 = \log\left(1+\frac{x}{e}\right)$, da cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(e+x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{x}{e}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{e}+o(x)}{x} = \frac{1}{e}.$$

w) Usiamo gli sviluppi $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$ e $\sin t = t + o(t)$ per $t \to 0$, e l'identità $\sin(\pi - t) = \sin t$:

$$\frac{\sin(\pi\cos x)}{x\sin x} = \frac{\sin\left(\pi - \pi\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x(x+o(x))} = \frac{\sin\left(\pi\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2+o(x^2))} = \frac{\pi\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2+o(x^2)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

z) Essendo

$$\sqrt{4+x} - 1 = 2\sqrt{1+\frac{x}{4}} - 1 = 2\left(1+\frac{x}{8}+o(x)\right) - 1 = 1 + \frac{x}{4} + o(x),$$

si ha

$$\left(\sqrt{4+x}-1\right)^{\frac{1}{e^x-1}} = e^{\frac{\log\left(\sqrt{4+x}-1\right)}{e^x-1}} = e^{\frac{\log\left(1+\frac{x}{4}+o(x)\right)}{x+o(x)}} = e^{\frac{\frac{x}{4}+o(x)}{x+o(x)}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^{1/4}.$$

5. Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{5}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{7}\right)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}},$$

quindi $g(x) \sim \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}f(x)$ $(x \to 0)$.

6. Si ha

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)^2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)^2(x-2)} = 0,$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\left(\frac{2-x}{2x}\right)^{1/3}} = -\lim_{x\to 2}(x-2)^{2/3}(2x)^{1/3} = 0.$$

Quindi $\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)^2$ è un infinitesimo di ordine superiore a $x-2$, e $x-2$ è un infinitesimo di ordine superiore a per $\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}$ per $x \to 2$. Possiamo anche calcolare l'ordine di infinitesimo α e la parte principale $k(x-2)^\alpha$ per $x \to 2$ rispetto a $x-2$ (l'infinitesimo campione di ordine 1). Infatti si ha

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}} = \left(\frac{2-x}{2x}\right)^{\frac{1}{3}} \sim -\frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{4}} \quad (x \to 2),$$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2 = \left(\frac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right)^2 \sim \frac{(x-2)^2}{8} \quad (x \to 2),$$

e quindi $\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}$ ha ordine $\frac{1}{3}$ e parte principale $-\frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{4}}$, e $(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2$ ha ordine 2 e parte principale $\frac{(x-2)^2}{8}$.

7. a) Ricordando che $e^t - 1 \sim t$ $(t \to 0)$ abbiamo

$$e^{3x^4} - 1 \sim 3x^4 \quad (x \to 0),$$

quindi $\alpha = 4$, $k = 3$.
b) Si ha

$$e^{\sqrt{x^2+1}} - e = e^{1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} - e = e\left(e^{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} - 1\right)$$
$$= e\left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \sim \frac{e}{2}x^2 \quad (x \to 0).$$

c)

$$\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}+x^2} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})} \sim \frac{1}{2}x^{3/2} \quad (x \to 0).$$

d) Essendo $\log(1+t) = t + o(t) \sim t$ $(t \to 0)$, si ha

$$\log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \sim -\frac{1}{2}x^2 \quad (x \to 0).$$

e) Notiamo che $\sqrt[3]{x+x^2} \sim \sqrt[3]{x}$ $(x \to 0)$, ma questo non ci permette di concludere che $\sqrt[3]{x+x^2} - \sqrt[3]{x} + x^2$ è equivalente a x^2 per $x \to 0$. Infatti ricordando che $(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x) \sim \alpha x$ $(x \to 0)$, si ha

$$\sqrt[3]{x+x^2} - \sqrt[3]{x} + x^2 = \sqrt[3]{x}\left((1+x)^{1/3} - 1\right) + x^2 = \sqrt[3]{x}\left(\frac{1}{3}x + o(x)\right) + x^2$$
$$= \frac{1}{3}x^{4/3} + o(x^{4/3}) \sim \frac{1}{3}x^{4/3} \quad (x \to 0).$$

f) Per $x \to 0$ si ha

$$e^{e^x} - e^{\cos x} = e^{1+x+o(x)} - e^{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} = e\left(e^{x+o(x)} - e^{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}\right)$$
$$= e\left(x + o(x) + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = ex + o(x) \sim ex.$$

g)

$$\log(x+3) - \log 3 = \log\frac{x+3}{3} = \log\left(1 + \frac{x}{3}\right) \sim \frac{x}{3} \quad (x \to 0).$$

h) Essendo $\sin(2x^2) \sim 2x^2$ e $\sqrt{1+3x} - 1 \sim \frac{3}{2}x$ $(x \to 0)$, si ha

$$\sin(2x^2)\left(\sqrt{1+3x} - 1\right) \sim 3x^3 \quad (x \to 0).$$

i) Essendo $1 - \cos t \sim \frac{1}{2}t^2$ $(t \to 0)$, si ha

$$\sqrt{1-\cos(x^2)} = \left(1 - \cos\left(x^2\right)\right)^{1/2} \sim \left(\frac{1}{2}x^4\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 \quad (x \to 0).$$

l) Per $x \to 0$ si ha

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x + o(x)\right) = x + o(x) \sim x.$$

m) Per $x \to 0$ si ha $\sin x = x + o(x)$ e quindi

$$\frac{\sin x + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}} = \frac{2x^{1/3} + o(x^{1/3})}{x^{1/5} + o(x^{1/5})} \sim \frac{2x^{1/3}}{x^{1/5}} = 2x^{2/15}.$$

n) La funzione $\sin(2x^3) \sim 2x^3$ $(x \to 0)$ è un infinitesimo di ordine 3, mentre $1 - e^{-x^2} \sim x^2$ $(x \to 0)$ ha ordine 2, quindi

$$x^2 + \sin(2x^3) + 1 - e^{-x^2} = 2x^2 + o(x^2) \sim 2x^2 \quad (x \to 0).$$

o) Utilizzando l'identità $\sin(\pi + t) = -\sin t$ abbiamo per $x \to 0$

$$\sin\left(\pi\sqrt{1+x}\right) \sin\left(\pi + \pi\frac{x}{2} + o(x)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}x + o(x)\right) \sim \frac{\pi}{2}x.$$

p) Ricordiamo che $\frac{1}{1+t} = 1 - t + o(t)$ $(t \to 0)$, quindi si ha

$$\begin{aligned}(1 + \sin x)\frac{1}{1-x} - 1 &= (1 + x + o(x))\,(1 + x + o(x)) \\ &= 2x + o(x) \sim 2x \quad (x \to 0).\end{aligned}$$

Possiamo anche procedere facendo prima il denominatore comune:

$$\frac{1 + \sin x}{1 - x} - 1 = \frac{\sin x + x}{1 - x} = \frac{2x + o(x)}{1 + o(1)} \sim 2x \quad (x \to 0).$$

q)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1 + 3x^2}}{1 + 2x} - 1 &= \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1 - 2x}{1 + 2x} = \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2) - 2x}{1 + 2x} \\ &= \frac{-2x + o(x)}{1 + o(1)} \sim -2x \quad (x \to 0).\end{aligned}$$

r) Notiamo che

$$\begin{aligned}\sqrt{9 + x} - 2 = 3\sqrt{1 + \frac{x}{9}} - 2 &= 3\left(1 + \frac{x}{18} + o(x)\right) - 2 \\ &= 1 + \frac{x}{6} + o(x) \quad (x \to 0),\end{aligned}$$

e quindi per $x \to 0$

$$\log\left(\sqrt{9 + x} - 2\right) = \log\left(1 + \frac{x}{6} + o(x)\right) = \frac{x}{6} + o(x) \sim \frac{x}{6}.$$

8. a) Si ha

$$\frac{2x^2 + \sqrt[3]{x}}{x^3} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^{8/3}} = \frac{2}{x} + o(\frac{1}{x}) \sim \frac{2}{x} \quad (x \to +\infty),$$

essendo $\frac{1}{x^{8/3}}$ un infinitesimo di ordine superiore a $\frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$.
b) Essendo arctg $t \sim t$ $(t \to 0)$, si ha

$$\operatorname{arctg} \frac{3}{x^2} \sim \frac{3}{x^2} \quad (x \to +\infty).$$

c) Notiamo che $\sqrt{x+1} \sim \sqrt{x}$ $(x \to +\infty)$, ma ciò non ci consente di dire che la funzione $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ è equivalente a $\frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$. Infatti per $x \to +\infty$ si ha

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

e quindi essendo $\frac{1}{x} = o(\frac{1}{\sqrt{x}})$ per $x \to +\infty$, si ha

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + o(\frac{1}{\sqrt{x}}) \sim \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

d) Essendo $\sqrt{1+t} - 1 \sim \frac{1}{2}t$ $(t \to 0)$, sarà

$$\sqrt{\frac{x-3}{x}} - 1 = \sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1 \sim -\frac{3}{2x} \quad (x \to +\infty).$$

e) Essendo $e^t - 1 \sim t$ $(t \to 0)$, si ha

$$e^{\frac{x+1}{x}} - e = e^{1+\frac{1}{x}} - e = e\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \sim \frac{e}{x} \quad (x \to +\infty).$$

f) Si ha $\log(1+t) \sim t$ $(t \to 0)$, quindi

$$\log\left(\frac{x+3}{x+1}\right) = \log\left(1 + \frac{2}{x+1}\right) \sim \frac{2}{x+1} \sim \frac{2}{x} \quad (x \to +\infty).$$

9. a) Posto $x - 2 = t$, quando x tende a 2, t tende a 0, e quindi

$$\log x - \log 2 = \log \frac{2+t}{2} = \log\left(1 + \frac{t}{2}\right) \sim \frac{t}{2} = \frac{1}{2}(x-2) \quad (x \to 2).$$

b) Posto $x - 1 = t$ si ha

$$e^x - e = e\left(e^{x-1} - 1\right) = e\left(e^t - 1\right) \sim e\,t = e(x-1) \quad (x \to 1).$$

c) Posto $x - \pi/2 = t$ si ha

$$1 - \sin x = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = 1 - \cos t \sim \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \quad (x \to \pi/2).$$

d) Poniamo $x - \sqrt{\pi} = t$. Ricordando che $1 - \cos z \sim \frac{1}{2} z^2$ $(z \to 0)$, si ha per $x \to \sqrt{\pi}$

$$\begin{aligned}1 + \cos(x^2) &= 1 + \cos(\sqrt{\pi} + t)^2 = 1 + \cos\left(\pi + 2\sqrt{\pi}\, t + t^2\right) \\ &= 1 - \cos\left(2\sqrt{\pi}\, t + t^2\right) \sim \frac{1}{2}\left(2\sqrt{\pi} t\right)^2 = 2\pi(x - \sqrt{\pi})^2.\end{aligned}$$

10. a) Per $x \to +\infty$ si ha

$$\frac{x^{3/2} + 5x^2}{1 + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} = \frac{5x^2 + o(x^2)}{x^{1/2} + o(x^{1/2})} \sim \frac{5x^2}{x^{1/2}} = 5x^{3/2}.$$

b) Notiamo che per $x \to +\infty$ si ha

$$\sqrt{x^4 + x^3} - x^2 = x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1\right) = x^2 \left(\frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})\right) = \frac{x}{2} + o(x),$$

e quindi essendo $\sqrt{x} = o(x)$ $(x \to +\infty)$, sarà

$$\sqrt{x^4 + x^3} - x^2 + \sqrt{x} = \frac{x}{2} + o(x) + \sqrt{x} = \frac{x}{2} + o(x) \sim \frac{x}{2} \quad (x \to +\infty).$$

11. a) Si ha

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2x+3} & \text{se } x \geq 2 \\ \frac{2x^2-x-2}{2x+3} & \text{se } x < 2, \end{cases}$$

dunque $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$. Essendo

$$\lim_{x \to -\frac{3}{2}^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to -\frac{3}{2}^{\pm}} \frac{2x^2 - x - 2}{2x + 3} = \frac{4}{0^{\pm}} = \pm\infty,$$

la retta $x = -\frac{3}{2}$ è asintoto verticale per f. Essendo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1/2$, la retta $y = \frac{1}{2}$ è asintoto orizzontale destro per f. Infine si verifica facilmente che

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = -2,$$

e quindi la retta $y = x - 2$ è asintoto obliquo sinistro per f.
b) Si ha $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. I limiti laterali per $x \to 0^{\pm}$ sono

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x\, e^{1 + \frac{1}{x}} = e \lim_{x \to 0^+} x\, e^{\frac{1}{x}} = e \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -e \lim_{x \to 0^-} x\, e^{\frac{1}{x}} = (-e) \cdot 0 \cdot e^{-\infty} = 0,$$

quindi la retta $x = 0$ è asintoto verticale (da destra) per f. Si ha poi

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} |x|e^{1+\frac{1}{x}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{1+\frac{1}{x}} = e,$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ex) = \lim_{x\to+\infty} ex\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = e \lim_{t\to0^+} \frac{e^t - 1}{t} = e,$$

e la retta $y = ex + e$ è asintoto obliquo destro per f. In modo analogo si verifica che la retta $y = -ex - e$ è asintoto obliquo sinistro per f.

12. Notando che
$$\log(e^x + x) = \log[e^x(1 + \frac{x}{e^x})] = x + \log(1 + \frac{x}{e^x}),$$
si verifica facilmente che la retta $y = x$ è asintoto obliquo destro per f. Non ha senso cercare l'asintoto per $x \to -\infty$ in quanto la funzione è definita su $(x_0, +\infty)$, per un certo $x_0 < 0$.

13. In ordine crescente di infinito per $x \to +\infty$ si ha
$$x\log^{10} x,\ \frac{x^2}{\log^{100} x},\ x^2,\ 2^x,\ 2^x\log x,\ 2^x x^2,\ x^x,\ 2^{5^x}.$$
Per verificare che 2^{5^x} è infinito di ordine superiore a x^x osserviamo che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{5^x}}{x^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{5^x\log 2}}{e^{x\log x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{5^x\log 2 - x\log x} = e^{+\infty} = +\infty.$$