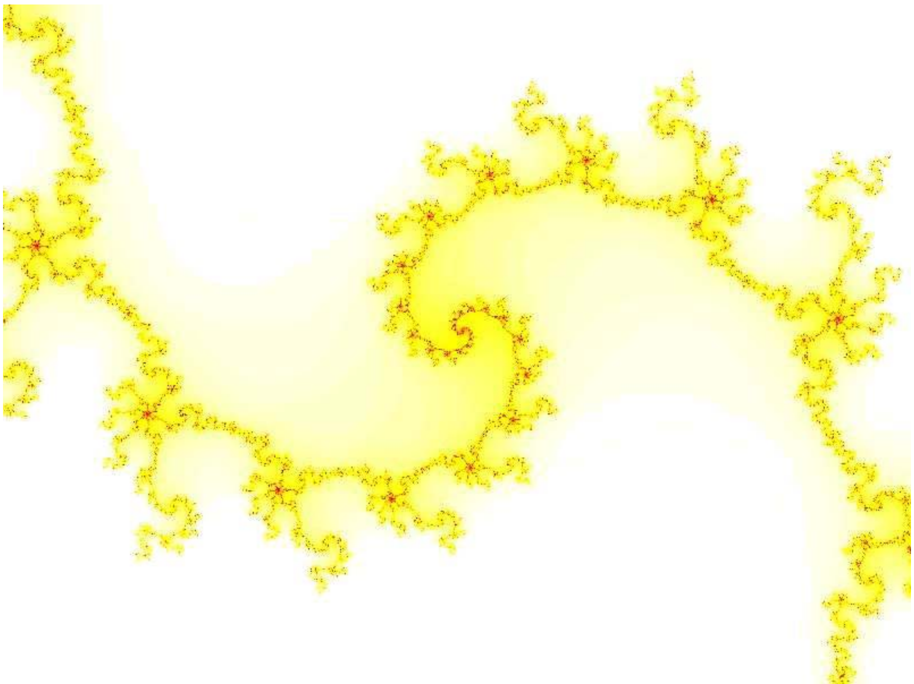
# Limiti e forme indeterminate



LORENZO ROI

Edizioni H–ALPHA

L'immagine frattale di copertina rappresenta un particolare dell'insieme di Mandelbrot centrato nel punto $(-0.861655953764096188, 0.277272645921191703)$ e ingrandito $2.04588 \times 10^8$ volte.

Titolo: `LogFrattale`.

# INDICE

23) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

24) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

25) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 2x}$

26) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

27) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x-a}$

28) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x + \operatorname{sen} x}{1-\cos x - \operatorname{sen} x}$

29) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^4 x}{(1-\cos x)^2}$

30) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^4 x}{(1-\cos x)^3}$

31) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 3x}$

32) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x + \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg}^2 x}$

33) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$

34) $\lim\limits_{x\to \pi\pm} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x} - \sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{\operatorname{sen}^2 x}$

35) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$

36) $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x - \ln \operatorname{sen} 2x$

37) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x(1-\operatorname{sen} x)$

38) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (1-\operatorname{tg} x) \operatorname{tg} 2x$



39) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

40) $\lim\limits_{x\to 0+} \exp \dfrac{\ln^2 x - 2}{\ln x - 2}$

41) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\lg_a(1+x)}$

42) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$

43) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}$

44) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{(e^x-1)^2}$

45) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

46) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{\ln 3x}}$

47) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{2x} - e^{-2x}}$

48) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

# Esercizi risolti

Requisiti necessari per affrontare gli esercizi presentati di seguito:

- conoscenza dei teoremi sulle operazioni tra limiti e sul limite di una funzione composta,
- continuità delle funzioni, in particolare delle funzioni elementari.
- conoscenza dei limiti fondamentali.

Queste brevi note riguardano le tecniche di risoluzione di quei limiti che ad un primo approccio conducono a forme di indeterminazione e che si possono trattare senza la conoscenza del teorema di De L'Hôpital. Le diverse tipologie che si presentano si possono ricondurre a 4 forme principali che solo per comodità di scrittura e senza alcun significato operativo, verranno individuate nel seguito come

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad +\infty - \infty.$$

Ad ogni modo tutte le volte che il calcolo del limite conduce a delle forme indeterminate, si dovrà cercare di trasformare la funzione in modo adeguato senza ovviamente modificare il limite e allo scopo di rimuovere, nella nuova forma, l'indeterminazione.
Per esempio il limite

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2}$$

dà luogo alla forma $0/0$. Difatti ricordando la continuità delle funzioni polinomiali, $\lim_{x \to 2} x^3 - 2x^2 - x + 2 = f(0) = 0$ e $\lim_{x \to 2} x - 2 = 2 - 2 = 0$. Se tuttavia riduciamo la frazione ai minimi termini, si ottiene

$$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} = \frac{x^2(x-2) - (x-2)}{x - 2} = \frac{(x-2)(x^2-1)}{x-2} = x^2 - 1 \iff x \neq 2.$$

Ne segue che l'ultima espressione coincide con la funzione di partenza solo se $x \neq 2$, condizione questa che permette di scrivere

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x^2 - 1 = 3$$

e quindi risolvere l'indeterminazione.

## 1. Limiti di funzioni razionali fratte

Una funzione di questo tipo si indica con

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} \quad \text{con } A(x) \text{ e } B(x) \text{ polinomi.}$$

I limiti di queste funzioni o sono immediati per la continuità della funzione $f(x)$, o in genere danno luogo alle forme $0/0$, $\infty/\infty$.

**Caso** $0/0$

Limiti di questo tipo si hanno quando $x$ tende ad un valore finito. L'indeterminazione viene eliminata *riducendo la frazione ai minimi termini.* A tale scopo si scompone in prodotto di fattori sia il numeratore che il denominatore e si semplificano i fattori comuni. Ad esempio si voglia calcolare il

$$\lim_{x\to 2} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}.$$

Poiché $A(2) = B(2) = 0$ la forma è indeterminata ma per lo stesso motivo, i due polinomi risultano divisibili per 2, cioè $x = 2$ è uno zero dei polinomi $A(x)$ e $B(x)$. Scomponendo allora con il metodo di Ruffini si ottiene

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x+3} = \frac{1}{5},$$

rimuovendo in tal modo l'indeterminazione.
Più in generale, quando il $\lim_{x\to\alpha} \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{0}{0}$, vuol dire che $x = \alpha$ è uno zero sia di $A(x)$ che di $B(x)$. In tal caso scomposti i due polinomi nei fattori

$$A(x) = (x-\alpha)Q_1(x) \qquad B(x) = (x-\alpha)Q_2(x)$$

il limite originario diviene

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)Q_1(x)}{(x-\alpha)Q_2(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{x-\alpha}{x-\alpha} \cdot \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}$$

e poiché il termine è tale che $\lim_{x\to\alpha} \frac{x-\alpha}{x-\alpha} = 1$ il limite si riduce a

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}.$$

Nell'eventualità che il limite precedente sia ancora indeterminato si può iterare il procedimento: in tal caso la radice $x = \alpha$ possiede un ordine di molteplicità maggiore di 1. Per esempio nel polinomio $A(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 13x^2 + 14x - 5 = (x-1)^3(x^2 + x + 5)$ la soluzione $x = 1$ possiede una molteplicità pari a 3.

**Esercizio 1** $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$. Il limite rientra nella forma $0/0$ per cui scomponendo numeratore e denominatore si trova

$$\lim_{x\to -2\pm} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = \lim_{x\to -2\pm} \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)^2(x+1)} = \lim_{x\to -2\pm} \frac{x-3}{(x+2)(x+1)} = \pm\infty.$$

Infatti risulta $\lim_{x\to-2\pm}\frac{1}{x+2}=\pm\infty$ e $\lim_{x\to-2}\frac{x-3}{x+1}=f(-2)=5$.

**Esercizio 2** $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^4-8x^2+16}{x^3-8}$. Poiché risulta $\lim_{x\to2}x^4-8x^2+16=f(2)=0$ e $\lim_{x\to2}x^3-8=f(2)=0$ il limite è indeterminato. Scomponendo numeratore e denominatore si trova

$$\lim_{x\to2}\frac{x^4-8x^2+16}{x^3-8}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2(x+2)^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=0$$

in quanto $\lim_{x\to2}(x-2)=0$ e $\lim_{x\to2}\frac{(x+2)^2}{x^2+2x+4}=f(2)=4/3$.

**Esercizio 3** $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}$. Scomponendo ancora il numeratore e il denominatore si giunge a

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2(x+1)}{(x-2)^2(x+2)}=\frac{3}{4}$$

in quanto $\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{(x-2)^2}=1$ e $\lim_{x\to2}\frac{x+1}{x+2}=f(2)=\frac{3}{4}$.

**Esercizio 4** $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$. Ricordando le scomposizioni elementari di binomi in fattori, il limite si riscrive

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}.$$

**Esercizio 5** $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^p-1}{x^q-1}$. Questo limite è la generalizzazione del precedente. Quindi, per le formule della scomposizione in fattori di un binomio, si può scrivere

$$\lim_{x\to1}\frac{x^p-1}{x^q-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{q-1}+x^{q-2}+\cdots+x+1)}.$$

Va quindi risolto il limite

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1}{x^{q-1}+x^{q-2}+\cdots+x+1}$$

che, data la continuità in $x=1$ della funzione a suo argomento, si calcola sfruttando tale proprietà ossia

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1}{x^{q-1}+x^{q-2}+\cdots+x+1}=f(1)=\frac{\sum_1^p 1}{\sum_1^q 1}=\frac{p}{q}.$$

**Caso $\infty/\infty$**

Per funzioni razionali fratte questo caso si verifica quando $x$ tende all'infinito. L'indetermi nazione viene eliminata mettendo in evidenza, sia al numeratore che al denominatore, *la potenza di $x$ con esponente massimo*. Per esempio si voglia calcolare il limite seguente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{B(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\frac{\infty}{\infty}$$

con $n$, $m$ interi positivi. Il numeratore è di grado $n$ ed il denominatore di grado $m$. Si proceda nel modo seguente:

*a.* si metta in evidenza al numeratore e al denominatore rispettivamente $x^n$ ed $x^m$. Si ottiene così il

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\cdots+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m}\right)}$$

*b.* a questo punto si tenga presente che i limiti di funzioni del tipo $p/x^q$ con $q>0$ valgono $\lim_{x\to\infty}\frac{p}{x^q}=0$. Quindi tutti gli addendi con una potenza positiva di $x$ al denominatore $x^q$, passando al limite, si annullano. Rimane da considerare, al limite, il termine $\frac{a_0x^n}{b_0x^m}$. I casi che possono presentarsi sono 3 e dipendono dai valori di $n$ e $m$.

*1.* se $n<m$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{B(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0}{b_0x^{m-n}}=0;$$

*2.* se $n=m$: $\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{a_0}{b_0}$ uguale al rapporto dei coefficienti di grado massimo;

*3.* se $n>m$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{B(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^{n-m}}{b_0}=\infty.$$

**Esercizio 6** $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+x-1}{x^4}$. Raccogliendo la potenza $x^3$ al numeratore discende

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+x-1}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{x}=0$$

in quanto $\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=0$.

**Esercizio 7** $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5+7x^4+1}{2x^5+7}$. In modo analogo, fattorizzando $x^5$ sia al numeratore che al denominatore si giunge a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5+7x^4+1}{2x^5+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(4+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(2+\frac{7}{x^5}\right)}=2$$

in quanto i termini del tipo $\frac{7}{x}$, $\frac{1}{x^5}$, $\frac{7}{x^5}$ hanno limite nullo e $\lim_{x\to\infty}x^5/x^5=1$.

**Esercizio 8** $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+1}{x-1}$. Con le medesime modalità dei precedenti esercizi raccogliamo $x^3$ al numeratore e $x$ al denominatore:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+1}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}=+\infty$$

avendo $\lim_{x\to\pm\infty}x^2=+\infty$.

## 2. Limiti di funzioni irrazionali

In base al tipo di funzione irrazionale, il limite può essere immediato o dare luogo alle forme di indeterminazione del tipo $0/0$, $\infty/\infty$, $+\infty-\infty$, $0\cdot\infty$. Difatti gli esempi seguenti (successivamente risolti)

1. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
2. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}}$
3. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x}$
4. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+5x+6}-x$
5. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3x-2}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{x+1}}$
6. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}\cdot\sqrt{x^2+1}$

risultano tutti indeterminati. I primi due riportano al caso $0/0$, il terzo e il quinto a $+\infty/+\infty$, il quarto a $+\infty-\infty$, mentre l'ultimo a $0\cdot\infty$.
Si tenga presente che tanto le funzioni razionali, quanto le irrazionali che, al limite, danno luogo a forme indeterminate diverse dalle $0/0$, $\infty/\infty$, $+\infty-\infty$, si possono manipolare per ricondurle alle precedenti tre forme di indeterminazione. L'ultimo esempio infatti si può scrivere per $x>0$ come

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt[6]{\frac{(x^2+1)^3}{x^2}},$$

forma che ci riconduce all'indeterminazione $\infty/\infty$. Fissiamo quindi l'attenzione, nel caso di limiti di funzioni irrazionali, sulle 3 forme $0/0$, $\infty/\infty$, $+\infty-\infty$.

**Caso** $0/0$

Si tratta sempre di eliminare l'indeterminazione cambiando la funzione in un'altra avente lo stesso limite. Tale scopo si può raggiungere in tre modi:

*1.* mediante razionalizzazione del numeratore, o del denominatore, o di entrambi,
*2.* mediante opportune scomposizioni,
*3.* mediante particolari artifici.

**Esercizio 9** $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. Tale limite verrà risolto in due modi diversi:

*a.* razionalizziamo il numeratore della funzione:

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}.$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

*b.* si può pure scomporre il denominatore considerandolo una differenza di quadrati. Cosicché

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

**Esercizio 10** $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}}$. Razionalizzando sia il numeratore che il denominatore discende

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} &= \frac{(x+2-2x)\sqrt{x-2}}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)}\\ &= \frac{-(x-2)\sqrt{x-2}}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)};\end{aligned}$$

ne segue pertanto

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)\sqrt{x-2}}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}} = \frac{0}{2+2} = 0.$$

**Esercizio 11** $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$. Pure tale limite verrà risolto in due modi diversi:

*a.* ricordando che $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ razionalizziamo il numeratore:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1} &= \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1} =\\ &= \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

*b.* scomponendo in fattori il denominatore, considerato come una somma di cubi si ha $x+1=(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)$ per cui

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{3}.$$

**Esercizio 12** $\lim_{x\to 1} \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x-1)^2}$. Si tratta di cercare di fattorizzare un termine che si annulli per $x=1$. Allora

*a.* razionalizzando il numeratore considerato come la differenza di due termini $x+1-2\sqrt{x}=(x+1)-2\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x+1)+2\sqrt{x}}{(x+1)+2\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)^2-4x}{(x-1)^2(x+1+2\sqrt{x})}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1+2\sqrt{x})}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1+2\sqrt{x}} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

*b.* scomponendo invece in fattori nel modo seguente $x+1-2\sqrt{x} = (\sqrt{x}-1)^2$ e $(x-1)^2 = [(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)]^2 = (\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)^2$, si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

**Caso $\infty/\infty$**

Anche in questo caso si procede come per le funzioni razionali fratte, cioè l'indeterminazione viene eliminata, in generale, mettendo in evidenza sia al numeratore che al denominatore la potenza di $x$ con esponente massimo. Occorre però porre attenzione sul fatto che:

*a.* gli esponenti sono frazionari: si ricordi infatti che $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$;

*b.* portando fuori dalla radice di indice $n$ pari una potenza di $x$, compare il valore assoluto. Per esempio $\sqrt{x^2} = |x|$, $\sqrt{x^4} = x^2$, $\sqrt[4]{x^6} = |x|\sqrt[4]{x^2}$.

*c.* Nel radicando (che è un polinomio razionale) per $x \to \infty$ può talvolta presentarsi la forma indeterminata $+\infty - \infty$. In tal caso questo limite è sempre infinito e va trattato con i metodi già visti. Infatti se

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} A(x) &= \lim_{x\to\infty} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\ &= \lim_{x\to\infty} x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right) = \infty\end{aligned}$$

e il segno di questo limite infinito dipende dalla $x$ ($x \to \pm\infty$) e dal coefficiente $a$.

Per concludere: il limite per $x \to \infty$ di un polinomio razionale dà luogo ad una somma algebrica di termini ciascuno con limite infinito. Fra essi prevale quello di ordine massimo (potenza di $x$ con esponente massimo). Pertanto nel calcolo si possono "trascurare" le potenze di $x$ inferiori al grado del polinomio ossia, come si suol dire, gli infiniti di ordine inferiore.

**Esercizio 13** $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x}$. Raccogliendo la potenza massima

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{2}{\sqrt{x}}} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

Il limite, come si può notare, è ancora dato dal rapporto dei coefficienti di grado massimo. In alternativa, posto $\sqrt{x} = t$ il limite assegnato si riscrive come

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2+t}{2t+t^2}$$

in modo da poter applicare la teoria dei limiti di funzioni razionali fratte al tendere ad infinito della variabile indipendente. In tal caso, avendo il medesimo grado i polinomi a numeratore e denominatore, il limite è pari al rapporto dei coefficienti di grado massimo ossia $1/1 = 1$.

**Esercizio 14** $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x-2}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{x+1}}$. Si osservi che il limite dovrebbe essere infinito perché, per $x \to +\infty$, il numeratore è un infinito di ordine 1 e il denominatore è un infinito di ordine $1/2$. Infatti

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{x+1}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x\left(4-\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{4-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = +\infty
\end{aligned}$$

in quanto $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ e i limiti degli altri 3 termini sono tutti finiti e positivi.

**Esercizio 15** $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}} \cdot \sqrt{x^2+1}$. Riscritto il limite sotto forma di quoziente si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x}} &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[6]{\frac{(x^2+1)^3}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[6]{\frac{x^6}{x^2}+3\frac{x^4}{x^2}+3\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[6]{x^4+3x^2+3+\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[6]{x^4\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^6}\right)} = +\infty
\end{aligned}$$

e dove nell'ultimo passaggio si è fattorizzata la potenza massima del radicando, responsabile del limite trovato.

**Caso $+\infty - \infty$**

Questo caso si riconduce, con trasformazioni della funzione che non mutano il suo limite, al precedente $\infty/\infty$. Tali trasformazioni dipendono dal tipo di funzione ma, in genere per le funzioni irrazionali coinvolgono una razionalizzazione.

**Esercizio 16** $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+5x+6}-x$. Razionalizzando

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+5x+6}-x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+5x+6}+x}{\sqrt{x^2+5x+6}+x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5x+6-x^2}{\sqrt{x^2+5x+6}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{5x+6}{\sqrt{x^2+5x+6}+x.}
\end{aligned}$$

Il limite è finito perché sia il numeratore che il denominatore sono degli infiniti di ordine 1 per $x \to +\infty$. Infatti, ricordando che la condizione $x \to +\infty$ permette di porre $|x| = x$ in quando $x > 0$ discende

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(5+\frac{6}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(5+\frac{6}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1\right)} = \frac{5+0}{1+1} = \frac{5}{2}.$$

**Esercizio 17** $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{1+x}\right)$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$. Conviene pertanto trasformare la funzione tramite una razionalizzazione del tipo

$$\sqrt{x}-\sqrt{1+x} = \left(\sqrt{x}-\sqrt{1+x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} = \frac{x-1-x}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} = \frac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{1+x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot\frac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$$

che risulta ancora indeterminato ma della forma $\infty/\infty$. Poiché però il grado del numeratore e del denominatore sono uguali ad $1/2$ ci si aspetta un limite finito. Difatti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}.$$

**Esercizio 18** $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[8]{x^8+1}+\sqrt[4]{x^4-1}}{\sqrt[5]{1+x^5}+\sqrt[3]{1+x^3}}$. Il numeratore e il denominatore sono infiniti ma del medesimo ordine ($=1$) per cui il limite è finito. Infatti poiché $x\to+\infty$, $|x|=x$ e perciò

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt[8]{1+\frac{1}{x^8}}+|x|\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^4}}}{x\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}+1}+x\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt[8]{1+\frac{1}{x^8}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^4}}\right)}{x\left(\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}+1}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1}\right)} = \frac{1+1}{1+1} = 1.$$

**Esercizio 19** $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{x^2+x-2}$. Il numeratore è un infinito di ordine $1/2$ inferiore a quello del denominatore (2). Il limite pertanto dovrebbe essere nullo. Infatti

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}}{x^2+x-2} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x^{2-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} = 0\end{aligned}$$

in quanto $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} = +\infty$ e i rimanenti termini possiedono limiti finiti e positivi.

**Esercizio 20** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$. Razionalizzando il numeratore

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \lim_{x\to0}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

**Esercizio 21** $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-2}$. Il limite porta ad una forma indeterminata di $0/0$. Per risolverlo razionalizziamo sia il numeratore che il denominatore in modo da fattorizzare un termine del tipo $x-1$ responsabile della indeterminazione. Allora

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2} &= \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1-2)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x^2+3-4)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{(x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{4}+2}{2(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

**Esercizio 22** $\lim_{x\to 81} \frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$. In questo caso, dato che $(\sqrt[4]{x})^2 = \sqrt{x}$, conviene porre $t = \sqrt[4]{x}$ e quindi, notato che $\lim_{x\to 81} t = 3$, ricondurre il limite della funzione irrazionale a quello di una funzione razionale

$$\lim_{x\to 81} \frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}} = \lim_{t\to 3} \frac{3-t}{9-t^2} = \lim_{t\to 3} \frac{1}{3+t} = \frac{1}{6}.$$

## 3. Limiti indeterminati coinvolgenti funzioni goniometriche

I casi di forme indeterminate per limiti coinvolgenti le funzioni goniometriche si affrontano generalmente trasformando la funzione $f(x)$ di cui si vuole il limite mediante le identità goniometriche soddisfatte dalle funzioni elementari coinvolte, in modo tale da giungere, in genere, al limite fondamentale $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ o a limiti da questo dedotti. Il tipo di trasformazione da effettuare viene, volta per volta, suggerito dal particolare limite ma la vastissima gamma dei limiti non permette di indicare un metodo per associare una particolare trasformazione ad un particolare limite.
Va tenuto ben presente inoltre che il limite fondamentale ha valore $\pi/180$ nel caso che la variabile sia espressa in gradi ossia

$$\lim_{x\to 0^\circ} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\pi}{180^\circ}.$$

**Esercizio 23** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$. Il limite si risolve facilmente riscrivendo la funzione tramite la nuova variabile $3x = y$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{\left(\frac{y}{3}\right)} = \lim_{y\to 0} 3 \cdot \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 3 \cdot 1 = 3,$$

in cui si deve notare che $\lim_{x\to 0} y = 0$. Tale limite può essere esteso, potendosi dimostrare in tutta generalità che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} mx}{x} = m.$$

**Esercizio 24** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$. Questo limite si presenta nella forma 0/0, risulta particolarmente importante, e verrà risolto in due modi diversi:

*a.* moltiplicando numeratore e denominatore per il fattore $1+\cos x$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\\ &= 1^2\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

e dove si è considerato il limite fondamentale.

*b.* il limite proposto si può ricondurre più direttamente al limite fondamentale utilizzando la formula di bisezione $1-\cos x = 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$. Sostituendo questa identità si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \lim_{y\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

e dove, analogamente al precedente esempio, si è considerato che $y = \frac{x}{2}$.

**Esercizio 25** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 2x}$. Limiti di questo genere si riconducono facilmente al limite fondamentale con l'accorgimento di moltiplicare sia il numeratore che il denominatore per la variabile $x$. Difatti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{x}\cdot\frac{x}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0} 5\cdot\frac{\operatorname{sen} 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\operatorname{sen} 2x}\cdot\frac{1}{2} = 5\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Generalizzando si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} px}{\operatorname{sen} qx} = \frac{p}{q}.$$

**Esercizio 26** $\lim_{x\to\pm\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$. Questo limite si riconduce facilmente a quello fondamentale se si riscrive la funzione come

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x}.$$

Introdotto il cambio di variabile $t = 1/x$ tale che $\lim_{x\to\pm\infty} 1/x = 0\pm$ il limite diventa

$$\lim_{x\to\pm\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0\pm}\frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

**Esercizio 27** $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x-a}$. Il limite è nella forma $0/0$. Per ricondurlo al limite fondamentale trasformiamo in prodotto, con le formule di prostaferesi, la differenza $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a$ responsabile dell'annullarsi del numeratore. Allora

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a)(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}\cdot(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} a)\\ &= \lim_{x\to a}\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x-a}(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} a)\\ &= \lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\left(\frac{x-a}{2}\right)}\cdot\cos\frac{x+a}{2}\cdot(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} a);\end{aligned}$$

posto $x-a=2y$ e notato che $\lim_{x\to a} y = 0$, il limite diventa

$$\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}\cdot\cos(y+a)\cdot[\operatorname{sen}(2y+a)+\operatorname{sen} a] = 1\cdot\cos a\cdot 2\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} 2a.$$

Dagli esempi finora presentati emerge come sia importante acquisire dimestichezza con le molteplici forme che possono assumere i limiti onde riconoscere, su tale base, la trasformazione più opportuna.

**Esercizio 28** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\operatorname{sen} x}{1-\cos x-\operatorname{sen} x}$. Il limite proposto rientra nella forma indeterminata $0/0$ e per la sua soluzione si possono seguire strade diverse. Ci si deve però rendere conto che per $x\to 0$ è il seno (o la tangente) a diventare zero e non il coseno. Quindi bisogna trasformare in modo da ottenere come fattore, sia al numeratore che al denominatore, un seno (o una tangente).

Ricordando allora che $\begin{cases} 1-\cos x = 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} & \text{(bisezione)}\\ \operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} & \text{(duplicazione)}\end{cases}$ si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\operatorname{sen} x}{1-\cos x-\operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}} = \frac{0+1}{0-1} = -1.\end{aligned}$$

Se si vuole la tangente come fattore al numeratore e al denominatore, si usino le formule che esprimono il seno e il coseno in termini di $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ ossia

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}{1-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)-\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)} &= \lim_{t\to 0}\frac{1+t^2-1+t^2+2t}{1+t^2-1+t^2-2t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{2t(t+1)}{2t(t-1)} = \lim_{t\to 0}\frac{t+1}{t-1} = -1\end{aligned}$$

dove si deve notare che $\lim_{x\to 0} t = 0$.

**Esercizio 29** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{(1-\cos x)^2}$. Per evidenziare il limite fondamentale è immediato riscrivere tale limite come

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4} \cdot \frac{x^4}{(1-\cos x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4} \cdot \left(\frac{x^2}{1-\cos x}\right)^2$$

per cui, in base anche all'importante limite $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4} \cdot \left(\frac{x^2}{1-\cos x}\right)^2 = 1^4 \cdot 2^2 = 4.$$

**Esercizio 30** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{(1-\cos x)^3}$. In modo analogo al precedente limite si può trasformare la funzione nella

$$\frac{\operatorname{sen}^4 x}{(1-\cos x)^3} = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4} \cdot \frac{x^4}{(1-\cos x)^3} = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4} \cdot \frac{x^6}{(1-\cos x)^3} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4} \cdot \left(\frac{x^2}{1-\cos x}\right)^3 \cdot \frac{1}{x^2}$$

per cui il limite diviene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4} \cdot \left(\frac{x^2}{1-\cos x}\right)^3 \cdot \frac{1}{x^2} = +\infty$$

in quanto $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ mentre i restanti due limiti (1 e 8) sono finiti e positivi.

**Esercizio 31** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 3x}$. A seguito della presenza del termine $2x$ ad argomento del coseno dovremo introdurre al denominatore un termine pari a $(2x)^2$ per risolvere l'indeterminazione originata dal numeratore ossia

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 3x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos 2x}{4x^2}\right) \cdot \frac{4x^2}{\operatorname{sen}^2 3x}.$$

Per lo stesso motivo, notata la presenza di $\operatorname{sen}^2 3x$ converrà riportarci al limite fondamentale riscrivendo identicamente $4x^2 = \frac{4}{9}(3x)^2$ cioè

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos 2x}{4x^2}\right) \cdot \frac{4x^2}{\operatorname{sen}^2 3x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos 2x}{4x^2}\right) \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{(3x)^2}{\operatorname{sen}^2 3x} \\ &= \lim_{x\to 0} \left[\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\right] \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3x}{\operatorname{sen} 3x}\right)^2\end{aligned}$$

Posto $t = 2x$ e $z = 3x$ valgono i limiti

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{3x}{\operatorname{sen} 3x}\right)^2 = \lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{\operatorname{sen} z}\right)^2 = 1$$

dai quali e per il teorema del prodotto tra limiti, discende

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 3x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot 1 = \frac{2}{9}.$$

**Esercizio 32** $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x+\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg}^2 x}$. Trasformando la funzione come

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\left(3+\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)}{\operatorname{sen} x\left(1+\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{3+\frac{\operatorname{tg} x}{x}}{1+\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}}$$

emergono, oltre a quello fondamentale, i due limiti $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ e $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$. Quest'ultimo risulta banale essendo $g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$ una funzione continua in $x = 0$ mentre per l'altro

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1.$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{3+\frac{\operatorname{tg} x}{x}}{1+\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}} = 1\cdot\frac{3+1}{1+0} = 4.$$

**Esercizio 33** $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$. Utilizzando la formula di bisezione $1-\cos x = 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$ è possibile trasformare il limite in

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

avendo considerato $\operatorname{sen}\frac{x}{2} > 0$ in quanto $x \to 0^+$: un metodo alternativo razionalizza invece il numeratore

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}} &= \lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} = 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

e dove $\sqrt{\operatorname{sen}^2 x} = |\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} x$ avendosi $x\to 0^+$.

**Esercizio 34** $\lim_{x\to \pi\pm} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{\operatorname{sen}^2 x}$. Il limite rientra nella forma $0/0$. Razionalizzando il numeratore riscriviamo identicamente

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\pi\pm}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{\operatorname{sen}^2 x}\\ &\qquad = \lim_{x\to\pi\pm}\frac{(\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x})(\sqrt{1+\operatorname{sen} x}+\sqrt{1-\operatorname{sen} x})}{\operatorname{sen}^2 x(\sqrt{1+\operatorname{sen} x}+\sqrt{1-\operatorname{sen} x})}\\ &\qquad = \lim_{x\to\pi\pm}\frac{2\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x(\sqrt{1+\operatorname{sen} x}+\sqrt{1-\operatorname{sen} x})}\end{aligned}$$

Poiché $\lim_{x\to\pi\pm} 2/\operatorname{sen} x = \mp\infty$ mentre $\lim_{x\to\pi\pm} \sqrt{1+\operatorname{sen} x} + \sqrt{1-\operatorname{sen} x} = f(\pi) = 2$ si ottiene

$$\lim_{x\to\pi\pm} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x} - \sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{\operatorname{sen}^2 x} = \mp\infty.$$

**Esercizio 35** $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$. Il fattore che annulla il denominatore è certamente $\operatorname{sen} x$ per cui conviene fattorizzarlo. A tal fine il limite si riscrive

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\operatorname{sen} x\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cos x}{\operatorname{sen} x(1-\cos x)} :$$

per giungere a dei limiti noti basta trasportare opportunamente $x^3$ al denominatore

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\left[\frac{\operatorname{sen} x(1-\cos x)}{x^3}\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2}\right)} = \frac{1}{1\cdot\frac{1}{2}} = 2.$$

**Esercizio 36** $\lim_{x\to 0+} \ln x - \ln \operatorname{sen} 2x$. Il limite conduce alla forma indeterminata $+\infty-\infty$ che, in base alle proprietà dei logaritmi, facilmente si può ricondurre alla $0/0$. Difatti

$$\lim_{x\to 0+} \ln \frac{x}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0+} \ln \left(\frac{2x}{\operatorname{sen} 2x}\right)\cdot\frac{1}{2} :$$

La funzione si può interpretare come composta da $y = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}$ e dalla funzione logaritmo. Ne segue che, notato come sia $\lim_{x\to 0+} y = 1$, il limite assume la forma

$$\lim_{y\to 1} \ln\left(\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2}\right) = \lim_{y\to 1} -\ln 2y = -\ln(2\cdot 1) = -\ln 2.$$

**Esercizio 37** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x(1-\operatorname{sen} x)$. La forma indeterminata coinvolta è la $0\cdot\infty$. Riportata quindi la funzione nella forma in cui l'indeterminazione sia la $0/0$ (o $\infty/\infty$) riscrivendo la $\operatorname{tg} x$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x(1-\operatorname{sen} x)}{\cos x},$$

e ricordando che il coseno si annulla a $\pi/2$, l'obiettivo da perseguire sarà quello di fattorizzare sia al numeratore che al denominatore un tale termine. A tale scopo moltiplichiamo e dividiamo per $1+\operatorname{sen} x$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)}{\cos x(1+\operatorname{sen} x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x\cos^2 x}{\cos x(1+\operatorname{sen} x)}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{1+\operatorname{sen} x} = \frac{1\cdot 0}{1+1} = 0.\end{aligned}$$

**Esercizio 38** $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1-\operatorname{tg}x)\operatorname{tg}2x$. La forma cui si giunge è ancora la $0\cdot\infty$. Utilizzando la formula di duplicazione per la tangente, riportiamo tutto alla $\operatorname{tg}x$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1-\operatorname{tg}x)\cdot\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x} &= \lim_{x\to\frac{pi}{4}}(1-\operatorname{tg}x)\cdot\frac{2\operatorname{tg}x}{(1-\operatorname{tg}x)(1+\operatorname{tg}x)}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}=\frac{2}{1+1}=1.\end{aligned}$$

Come si può constatare si è fattorizzato al denominatore il termine $(1-\operatorname{tg}x)$ responsabile del suo annullamento per $x\to\frac{\pi}{4}$, rimuovendo in tal modo l'indeterminazione.

## 4. Limiti di funzioni esponenziali e logaritmiche

Nel caso delle funzioni derivanti da quella esponenziale i metodi presentati finora rimangono validi in particolare, in tutti quei casi in cui ci si può riportare a funzioni composte dove una delle funzioni componenti risulta un esponenziale o un logaritmo. È d'altra parte necessario conoscere il limite fondamentale

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

al quale spesso ci si dovrà riportare per rimuovere le indeterminazioni.

**Esercizio 39** $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. La funzione si può considerare come una funzione composta $f[g(x)]$ con l'argomento $g(x)=\sqrt{x^2+1}-x$. Quest'ultimo per $x\to\infty$ presenta una indeterminazione del tipo $+\infty-\infty$, per cui il limite richiesto si potrà determinare solo se si risolve questa indeterminazione. Con i metodi già visti, conviene procedere ad una razionalizzazione

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{y\to0+}\ln y=-\infty.$$

**Esercizio 40** $\lim_{x\to0+}\exp\frac{\ln^2x-2}{\ln x-2}$. Anche questo limite può essere affrontato considerando la funzione ad argomento come una funzione composta dalle

$$f(x)=e^t \quad \text{e} \quad t=\frac{\ln^2x-2}{\ln x-2}.$$

Va perciò calcolato per primo il limite della $t$ che conduce ad una forma del tipo $+\infty/-\infty$. Raccogliendo a numeratore e denominatore la potenza massima di $\ln x$ si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}\frac{\ln^2x-2}{\ln x-2} &= \lim_{x\to0+}\frac{\ln^2x\left(1-\frac{2}{\ln^2x}\right)}{\ln x\left(1-\frac{2}{\ln x}\right)}\\ &= \lim_{x\to0+}\frac{\ln x\left(1-\frac{2}{\ln^2x}\right)}{1-\frac{2}{\ln x}}=-\infty\end{aligned}$$

in quanto $\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$, $\lim_{x\to 0+} \frac{2}{\ln x} = 0$. Ne segue che

$$\lim_{x\to 0+} \exp \frac{\ln^2 x - 2}{\ln x - 2} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0.$$

**Esercizio 41** $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\lg_a(1+x)}$. Il limite si presenta nella forma $0/0$. Per poter ottenere il limite fondamentale si porta la $x$ al denominatore

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{x}\lg_a(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\lg_a(1+x)^{1/x}}.$$

posto $y = (1+x)^{1/x}$ si tratta di risolvere il limite

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Questo rientra nell'elenco dei limiti importanti essendo riconducibile immediatamente al limite fondamentale con la sostituzione $t = \frac{1}{x}$. Poiché $\lim_{x\to 0} t = \infty$ vale pertanto

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e,$$

per cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\lg_a(1+x)^{1/x}} = \lim_{y\to e} \frac{1}{\lg_a y} = \frac{1}{\lg_a e}.$$

**Esercizio 42** $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$. L'indeterminazione $0/0$ si risolve ponendo $y = a^x - 1$ da cui discende $x = \lg_a(1+y)$. Inoltre $\lim_{x\to 0} y = 0$ per cui sostituendo si ottiene

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{\lg_a(1+y)}$$

che in base alle considerazioni viste nell'esercizio precedente implica

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{\lg_a(1+y)} = \frac{1}{\lg_a e} = \ln a.$$

Interessante ed importante risulta il caso particolare per $a = e$ di questo limite che assume la forma

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

**Esercizio 43** $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}$. È facile ricondurre questo limite a due limiti conosciuti. Moltiplicando e dividendo per $x$ numeratore e denominatore si giunge a

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

**Esercizio 44** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{(e^x-1)^2}$. In modo analogo a quanto fatto nel precedente esercizio, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{(e^x-1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{(e^x-1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{e^x-1}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

**Esercizio 45** $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. Ricordando che un'espressione del tipo $[f(x)]^{g(x)}$ si può riscrivere come

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

il limite diviene

$$\lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{1-x}\cdot \ln x} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{\ln x}{1-x}},$$

per cui è conveniente affrontare il limite dell'esponente

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x}.$$

Posto quindi $1-x=-y$ è $\lim_{x\to 1} y = 0$ per cui

$$\lim_{y\to 0} \frac{-\ln(1+y)}{y} = \lim_{y\to 0} -\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}.$$

Con un'ulteriore sostituzione di variabile $z = \frac{1}{y}$ e notato che $\lim_{y\to 0} z = \infty$, il limite si riscrive

$$\lim_{z\to\infty} -\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = -\ln e = -1.$$

Il limite originario è pertanto

$$\lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{1-x}\cdot \ln x} = \lim_{t\to -1} e^t = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

**Esercizio 46** $\lim_{x\to 0+} x^{\frac{1}{\ln 3x}}$. Riscritto, in base alle note espresse nell'esercizio precedente, il limite come

$$\lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{\ln 3x}\cdot \ln x}$$

si dovrà cercare il

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\ln 3x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\ln 3 + \ln x}.$$

Fattorizzato a denominatore il $\ln x$ si giunge a

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\ln x\left(\frac{\ln 3}{\ln x}+1\right)} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\left(\frac{\ln 3}{\ln x}+1\right)} = \frac{1}{0+1} = 1$$

in quanto $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln 3}{\ln x} = 0$. Ne discende perciò

$$\lim_{x\to 0+} x^{\frac{1}{\ln 3x}} = \lim_{y\to 1} e^y = e^1 = e.$$

**<u>Esercizio 47</u>** $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{2x} - e^{-2x}}$. Raccogliendo a fattore a numeratore il termine $e^{-x}$ e a denominatore $e^{-2x}$ il limite assume la forma

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-2x}(e^{4x}-1)} = \lim_{x\to 0} e^x \cdot \frac{e^{2x}-1}{e^{4x}-1}.$$

Il secondo fattore si può riportare a limiti noti riscrivendolo come

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} e^x \cdot \frac{e^{2x}-1}{e^{4x}-1} &= \lim_{x\to 0} e^x \cdot \frac{e^{2x}-1}{\frac{1}{2}\cdot 2x} \cdot \frac{\frac{1}{4}\cdot 4x}{e^{4x}-1} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} e^x \cdot \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot \frac{4x}{e^{4x}-1} = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

dove si è utilizzato il noto limite $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

**<u>Esercizio 48</u>** $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$. Esplicitiamo un fattore pari a $e^{bx}$ riscrivendo il limite nella forma

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{e^{ax}e^{bx}}{e^{bx}} - e^{bx}\right).$$

Raccogliendo quindi a fattor comune il termine $e^{bx}$ discende

$$\lim_{x\to 0} e^{bx} \frac{e^{ax-bx}-1}{x} = \lim_{x\to 0} e^{bx} \left[\frac{e^{(a-b)x}-1}{x}\right].$$

Posto $t = (a-b)x$ il limite del termine tra parentesi quadrate diviene

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{(a-b)x}-1}{x} = \lim_{t\to 0} (a-b) \cdot \frac{e^t-1}{t} = a-b$$

dove si è fatto uso dell'importante limite $\lim_{x\to 0} (e^x-1)/x = 1$. Poiché $\lim_{x\to 0} e^{bx} = 1$, si ha in definitiva

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = 1 \cdot (a-b) = a-b.$$

## Limiti fondamentali e importanti

Limiti fondamentali:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Limiti importanti collegati:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} mx}{x} = m \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} px}{\operatorname{sen} qx} = \frac{p}{q} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \frac{1}{\lg_a e} = \ln a$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^{px} - 1}{a^{qx} - 1} = \frac{p}{q}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{\alpha}$$